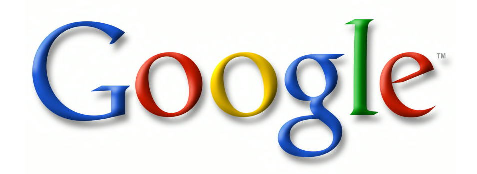
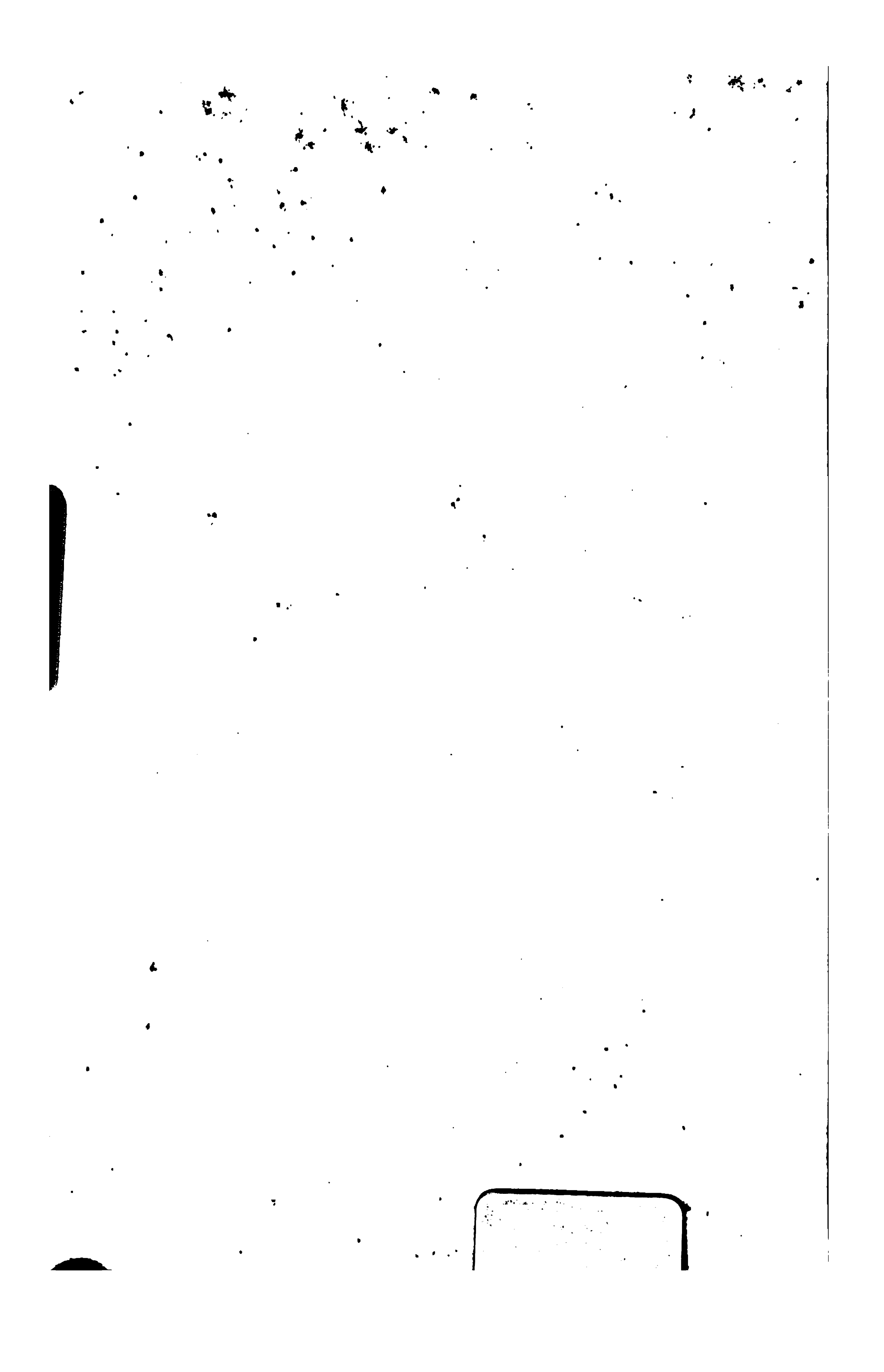
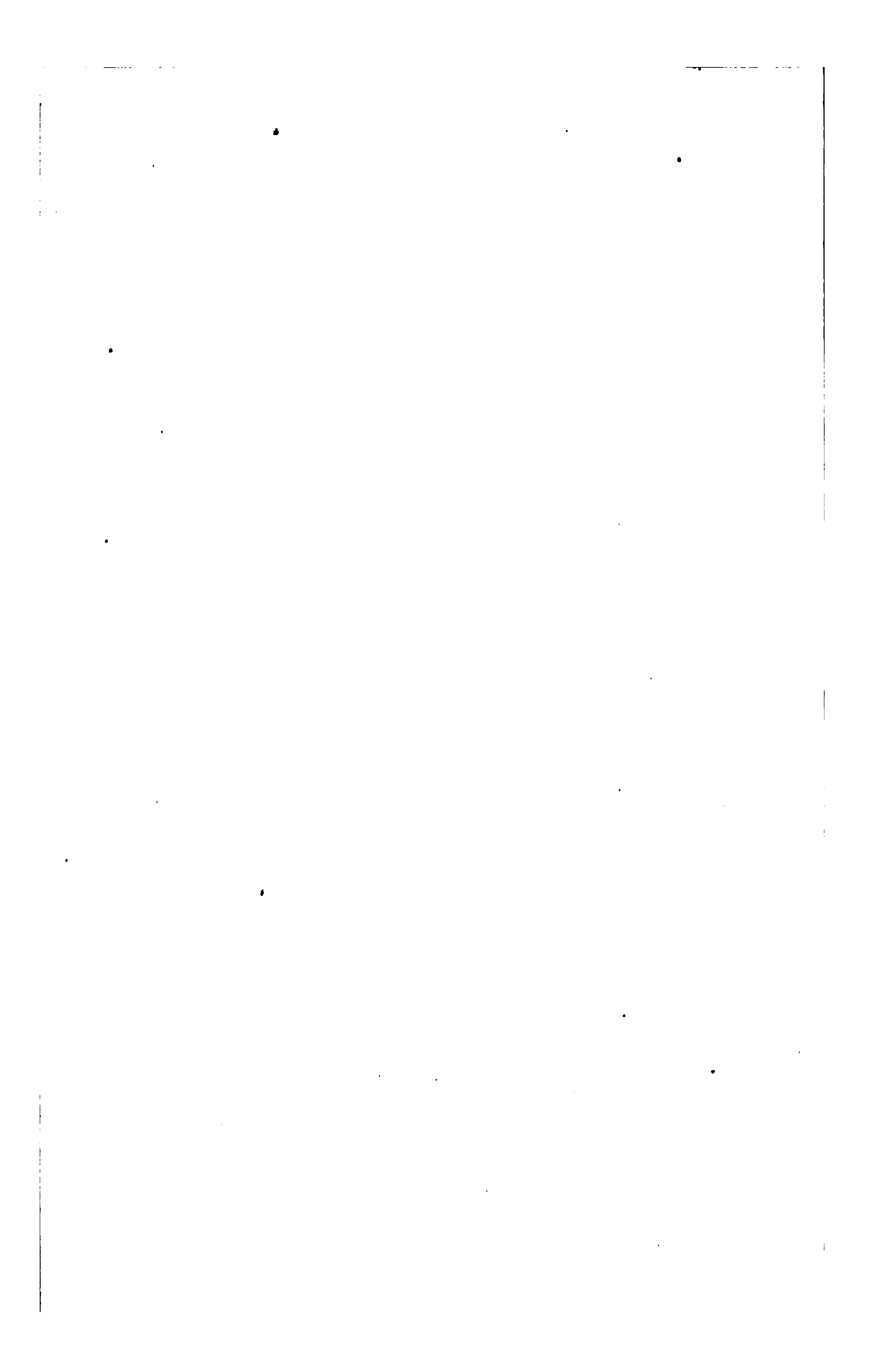








68.

Die

Einheit der Naturkräfte

und die

Deutung ihrer gemeinsamen Formel.

Mit fünf Figurentafeln.

Von

O. Schmitz-Dumont.

Berlin.
Carl Duncker's Verlag
(C. Heymons).
1881.

Die

Einheit der Naturkräfte

und die

Deutung ihrer gemeinsamen Formel.

Mit fünf Figurentafeln.

Von

O. Schmitz-Dumont.



Berlin.
Carl Duncker's Verlag
(C. Heymons).
1881.

Vorwort.

In einer früheren Arbeit sprach ich den Gedanken aus, dass es vielleicht möglich sein würde, alle Naturkräfte als Wirkungen absolut einfacher Elemente, nach dem Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernung in abstossendem Sinne, zu erklären, und zeigte, dass, wenn dies sich bestätigen sollte, dann auch eine definitive Antwort auf die Frage nach dem Wesen von Kraft und Stoff gegeben werden könne. Die Ausarbeitung dieses Gedankens hat nirgendwo eine unüberwindliche Schwierigkeit gezeigt, dagegen eine so grosse Einfachheit in der Erklärung vieler bisher ungelöster Erscheinungen, dass ich das Gewonnene für reif halte der Diskussion unterbreitet zu werden. Die physikalischen Resultate sind: Eine in jeder Beziehung bestimmte Vorstellung über Aether und ponderabele Materie, sodass deren gesammte Wechselwirkungen auf mechanische Probleme reduzirt werden können. Die Theorie der Wärme, der Gase, Reflexion, Interferenz, Polarisation der Aetherschwingungen bleiben unverändert, wie in den bisherigen Theorien; Gravitation, Kohäsion, Brechung und Dispersion des Lichtes erhalten andere Erklärungen. Auf dem Gebiete der Elektrizität resultirt die Faraday'sche Theorie, und erhalten die Eigenschaften von dessen dielektrischem Medium eine mechanische Erklärung. Die Resultate der Abschnitte B und C sind unabhängig von denjenigen in A, würden sich aber bei allseitiger Bestätigung der letzteren mit diesen zu einer eindeutigen objektiven Naturerklärung ohne jede Hypothese zusammenschliessen.

März 1881. **D. V.**

Inhalt.

A. Die Einheit der Naturkräfte.

Seite.

I. Methode physikalischer Forschung 3
II. Der Aether 8
III. Das Körperatom 14
IV. Bewegung der Körper im Aether 20
V. Gravitation 23
VI. Kohäsion 24
VII. Licht 27
VIII. Wärme 45
IX. Elektrizität 49
X. Magnetismus 72

B. Erkenntnisstheoretische Deutung des Kraftgesetzes.

I. Die fernewirkende Kraft 79
II. Wirkung durch Stoss 82
III. Erklären, Begreifen 85
IV. Die arithmetische Form des Kausalbegriffes 94
Rückblick 100

C. Die zeitlich-räumliche Ordnung.

I. Die Zeit, der Bildner des Raumes 107
II. Definitionen 110
III. Kombinationen der logischen Synthese 116
IV. Unvollkommenheiten analytischer Symbolik 128
V. Das Kongruenzenaxiom 138

Schlussresultate.

Parallelismus zwischen intellektuellen Regeln und Naturgesetzen . . . 152
Wesen von Kraft und Stoff 157

Errata.

Tafel 4 Fig. 13 lies $\pm \frac{1}{5}$ statt $\pm \frac{1}{2}$.

Buch A.

Die Einheit der Naturkräfte.

I.

Methode physikalischer Forschung.

Der Gang physikalischer Forschung wird gemeiniglich dahin bestimmt, dass es ihr obliege, zuerst Beobachtungen zu sammeln, hieraus die Gesetze der Wechselwirkungen abzuleiten, und sodann diese in einer Theorie zu vereinigen; das heisst, jene Wechselwirkungen auf eine möglichst geringe Anzahl von logisch zulässigen Ursachen zurückzuführen. In dieser Weise sind die physikalischen Erscheinungen in eine Anzahl verschiedener Disziplinen vertheilt worden, als „Gravitation, Akustik, Wärme etc." In einer jeden einzelnen dieser Abtheilungen ist es ziemlich gelungen, obige Aufgabe befriedigend zu lösen; aber nebeneinander sind diese Theorien als mehr oder weniger heterogene Systeme stehen geblieben, im Gegensatze zur ganzen Natur, welche sich bei jedem Schritte als eine strenge Einheit kundgiebt. Stoffe und Kräfte hält man für die letzten Elemente der Natur, oder auch, des wissenschaftlichen Gebäudes; aber die Definition dieser beiden Wörter ist ebenso schwankend geblieben wie die philosophischen Ansichten über den Urgrund der Dinge und die letzten Fragen menschlichen Witzes. Die mathematische Physik glaubt genug gethan zu haben, wenn sie jene Kräfte definirt nach dem algebraischen Sinne der analytischen Formel, welche zur Berechnung der zugehörigen Erscheinungen geführt hat. Um die Deutung der Grösseneinheiten, und die Berechtigung ihrer Zusammenstellung in dieser oder jener Formel, bekümmert sie sich nicht. Deshalb entstehen so viele Kräftearten wie verschiedene Erscheinungsgebiete; oder man findet sogar, dass ganz verschiedene Kräfte mathematisch gleich gut eine und dieselbe

1*

Erscheinung erklären — wie man zu sagen pflegt. Dieselbe Unbestimmtheit haftet an dem Stoffbegriffe, werde er für einen nothwendigen oder aber nur für einen konventionellen Begleiter der Kräfte angesehen.

Die heutzutage allgemeinste Form, in welcher diese Gegenstände besprochen werden, besteht darin, dass man die Existenz zweier verschiedener Stoffe annimmt; die gewöhnliche ponderabele Materie, und den nicht schweren, nicht greifbaren Aether. Zuweilen, z. B. bei der Bewegung der Körper im leeren Raume, schreibt man dem Aether gar keine Widerstandsfähigkeit zu, zuweilen, wie bei den Lichtschwingungen, eine ungeheuer grosse. In diesen beiden Stoffen sollen sodann gewisse Kräfte residiren, welche nach Art lebender Wesen, von denen ja diese ganze Vorstellung entnommen ist, ihre Befehle nach Aussen ertheilen. Sagt man: jene Stoffe wirken in die Entfernung hin mit einer gewissen Kraft, so wird durch diese Redeweise wohl die unpassende Analogie lebender und lebloser Wirkungsweisen verdeckt, aber nicht durch eine präzisere logische Fassung ersetzt. Die rein empirische Forschung, womit nach einer heute weit verbreiteten Ansicht alle Erkenntniss erschöpft sein soll, hat allerdings nicht nöthig, sich mit jenen Fragen zu befassen; denn mit solchen Kräften und Stoffen ist ein regelrechter Rahmen aufgestellt, wohinein sich alle weiteren Beobachtungen einregistriren und die verschiedenen Erscheinungen eines jeden Gebietes rechnend in Verhältnisse zueinander bringen lassen. Auf die Anzahl jener Kräfte kommt es dann gar nicht an; je grösser dieselbe, desto bequemer lassen die Sachen sich arrangiren. Mit diesen Stoffen und Kräften lässt sich Alles trefflich beschreiben, — mehr will jene Forschungsweise ja nicht —, ganz einerlei, ob solchen Worten ein Sinn beigelegt wird, welcher vernünftig ist oder aber bei logischer Analyse sich als absurd ausweist. Dergleichen Vernünfteleien oder Deuteleien glaubt man sich enthoben, weil Stoffe und Kräfte doch etwas so Verständliches seien, wobei alles Weiterfragen ein Ende haben müsse.

Der allgemeine Vernunftinstinkt des Forschers verfolgt aber ein ideelles Ziel, und dies heisst: möglichst wenige letzte Ursachen, womöglich nur eine einzige; und die genauere Beobachtung der Erscheinungen, welche uns häufig die Umwandlung der einen

physikalischen Kraft in die andere zeigt, giebt die empirische Ermuthigung, jenem ideellen Ziele zuzustreben.

Wird dieser Versuch unternommen, so liegt es nahe, den vorhin angedeuteten Gang der sogenannten induktiven Forschungsweise auch hier anzuwenden; nachzusehen, ob jene vielen Ursachen nicht Modifikationen einer einzigen sind; und diese einzige nicht etwa in einer neuen phantastischen Konstruktion zu vermuthen, sondern in der einfachsten und allgemeinsten Wirkungsweise, welche wir bis dahin beobachteten. In dieser Weise behielt Buffon Clairault gegenüber Recht, als letzterer Newton's Gravitationsgesetz für unzureichend erklärte, seine Formeln der Mondbewegung zu begründen, und ein komplizirteres Gesetz der Anziehung schwerer Körper aufstellte. Buffon konnte Clairault nicht widerlegen, weil er dessen Formeln nicht verstand. Seine Ansicht aber, dass die einfachsten Gesetze stets die grössere Wahrscheinlichkeit in der Natur für sich hätten, erwies sich als richtig und die Resultate von Clairault's Formeln als falsch. Die einfachsten der bis jetzt angenommenen Naturkräfte sind nun jene, welche nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung wirken. Es sind die einzigen, für welche uns die Beobachtung nachgewiesen hat, dass sie für jede Entfernung in derselben Weise wirken. Alle anderen, von denen etwa wie bei den sogenannten Molekularkräften vermuthet wird, dass sie einem anderen Gesetze folgen, sind nicht aus direkten Beobachtungen gefolgert, sondern entstehen aus Schlüssen von Rechnungen sehr zweifelhaften Werthes, da bei diesen Rechnungen stets nur ein geringer Theil der zusammenwirkenden Umstände in Betracht gezogen wird.

Bleiben wir deshalb bei diesen Kräften oder vielmehr dem Gesetz der Wechselwirkung, welches sich bei der Gravitation der Elektrizität und dem Magnetismus kund giebt. Zu Gunsten desselben als des Ausdrucks einer vermutheten oder gesuchten Urkraft, bleibe nicht unbeachtet, dass seine Form übereinstimmt mit derjenigen einer rein mechanischen Bewegung, welche sich im Raume, d. h. nach jeder Richtung unter denselben Verhältnissen, ausbreitet. Wir haben zuvörderst eine Wahl zu treffen, ob wir diese Kraft in anziehender oder abstossender Weise wirkend annehmen wollen.

Hier scheint die allgemeine Schwere aller greifbaren Materie,

mithin wie man sich berechtigt fühlt anzunehmen, der Materie *kat' exochen,* für die Anziehung als eine durchaus nothwendige Urkraft zu entscheiden. Laplace, Herschel u. A. dachten sich alle Körper ähnlich konstituirt wie die Planetensysteme, die Planeten den einfachsten Atomen, Planetensysteme den Molekel entsprechend. Es ist mir nur ein Versuch bekannt, welcher gemacht worden ist, diesen naheliegenden Gedanken der ausführlicheren Rechnung zu unterwerfen.[1]) Der Autor leitet dort aus allgemeinen Bewegungsgleichungen ab, dass zu rotirenden Scheiben angehäufte Körperchen sich in vielen Beziehungen wie die Molekel verhalten, welche von der kinetischen Gastheorie vorausgesetzt werden. Sobald er aber ein anderes Gebiet der Physik betritt, führt er unter allgemeinen Begriffen alle die üblichen anderen physikalischen Kräfte wieder ein, obschon er sich schliesslich gegen die ganze Idee einer fernewirkenden Kraft ausspricht. Für den Leser kann das negative Resultat der ganzen Untersuchung kein anderes sein, als dass mit der Anziehungskraft allein nichts anzufangen ist. Hierzu führt auch schon die einfache Betrachtung, dass bei Anziehung allein, wie gross auch die ursprüngliche kinetische Energie der Materie sein möge, schliesslich alle Körper sich in einen einzigen Klumpen zusammenballen müssten; womit nicht allein ein Ende der Welt prophezeit wird, was bei der grenzlosen Dauer verflossener Zeiten schon längst hätte erreicht werden müssen, sondern auch ein Widerspruch gegen das Prinzip von der Erhaltung der Kraft gesetzt ist.

An die Aufstellung und Ausarbeitung der Hypothese einer abstossenden Kraft als Urkraft scheint bisher nicht gedacht worden zu sein; vielleicht weil sich der gewöhnlichen Vorstellungsweise die Meinung aufdrängt, es müssten sich dann die Körper im Raume zerstreuen, die ganze Welt auseinanderfliegen. Glaubten doch auch die in möglichst einfacher Weise weltkonstruirenden Philosophen nicht ohne diesen Dualismus anziehender und abstossender, hassender und liebender, Elemente auskommen zu können, so dass der Gegensatz zweier heterogener Daseinsarten zum Prinzip der Weltschöpfung wie Welterklärung erhoben werden musste.

---

[1]) A. Walter. Untersuchungen über Molekularmechanik. Berlin 1873.

Ich gedenke dagegen zu zeigen, dass die alleinige abstossende Kraft diesen Bedenken nicht unterliegt; dass alle physikalischen Kräfte sich auf dies eine Gesetz zurückführen lassen, in der Weise, dass jedes nach einem anderen Gesetz wirkende Körpertheilchen der Physik sich auflösen lässt in eine Atomgruppe von bestimmter Anordnung, deren Elemente jenem einen Gesetze gehorchen. Ausserdem werden in dieser Theorie viele Erscheinungen eine Erklärung erhalten, für welche eine solche mit den bisherigen physikalischen Kräften nicht gelang. Diejenigen Physiker, welche aus den bekannten und sehr berechtigten Bedenken die Idee einer fernewirkenden Kraft als unbegreiflich und unzulässig überhaupt abweisen, werden in dem Abschnitt B die erkenntniss-theoretische Deutung dessen finden, was hier vorläufig „fernewirkende Kraft" genannt ist. Sie werden dort sehen, dass ihre Bedenken in diesem speziellen Falle gegenstandlos sind, weil von einer Kraft in dem mit Recht angefochtenen Sinne überhaupt nicht die Rede war.

Unsere Hypothese lautet demnach: Es giebt nichts Anderes als Kraftzentren von gleicher Intensität in verschiedenen Zuständen der Bewegung, welche abstossend, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung, aufeinander wirken.

Die gewöhnliche Vorstellung fordert ein Domizil für die Kräfte, denn der gemeine Kraftbegriff ist von lebenden Wesen, zuvörderst der Muskelkraft unseres Körpers, entnommen. Deshalb finden wir es natürlich und selbstverständlich, dass eine Kraft sich in einem Körper befinden könne, halten es aber für widersinnig, einem geometrischen Punkte, einem körperlichen Nichts, so etwas zuzusprechen. Wir können uns dieser Vorstellungsweise fügen; denn obschon diese Begriffzusammenstellung unpassend ist, und es sich in Abschnitt B herausstellen wird, dass dieses körperliche Domizil der Kraft nur ein Nest von Widersprüchen, und zugleich ganz unnöthig ist zur Erklärung dessen, was Kraft und Materie genannt wird, — so kann es doch einstweilen keinen Schaden verursachen, wenn wir der Kraft einen materiellen Aufenthaltsort gönnen. Wir sagen also: es giebt untheilbare materielle Körperchen, in welchen obige Kräfte residiren, oder: Massentheilchen wirken mit jener Kraft aufeinander. Wir müssen dann aber in Betreff der Gestalt jener

Massentheilchen wiederum die einfachst mögliche Voraussetzung machen. Dieselben müssen nach jeder Richtung hin gleich wirken, und alle mit gleicher Intensität. Da die Kräfte von der Form $\frac{1}{r^2}$, so ist diese letztere Bedingung geometrisch aequivalent mit der, dass alle Massentheilchen Kugeln von gleicher Grösse sind. Eine jede andere geometrische Form würde jene einfachst mögliche Annahme nicht erfüllen.

II.

Der Aether.

Denken wir uns eine Anzahl solcher Kraftelemente lediglich ihrer Potenzialenergie überlassen, so werden dieselben streben, Lagen stabilen Gleichgewichtes gegeneinander einzunehmen. Irgend eine solche Gruppirung von dergleichen einfachsten Elementen, welche keine eigene Bewegung haben, werde Aether genannt. Die stabilste Lage würde diejenige sein, in welcher ein jedes Element gleiche Entfernung von seinen nächsten Nachbarelementen hätte, wie die Ecken auf dem regelmässigen Tetraeder. Mit Tetraedern kann aber kein Raum kontinuirlich ausgefüllt werden; eine solche nach jeder Richtung hin gleiche Lagerung ist also unmöglich. Eine möglichst regelmässige Anordnung wäre die auf Ecken gleicher Würfel oder Oktaeder. Um die Eigenschaften des Aethers kennen zu lernen, müssen wir die Wirkung einer Gruppe resp. des ganzen den Raum erfüllenden Aethers auf einen seiner Punkte berechnen. Zu dieser Berechnung muss eine bestimmte Anordnung desselben vorausgesetzt werden, und es werde dazu die oktaedrische Lagerung gewählt, welche identisch ist mit den Punkten auf Würfelecken mit je einem Punkt im Zentrum der Würfel. Um keine Verwechslung mit den demnächst zu definirenden Körperatomen herbeizuführen,

sollen die Aetherelemente schlechtweg **Kraftpunkte** genannt werden. Denn wären diese Elemente auch ausgedehnt, so würden sie nach den gegebenen einfachsten Bestimmungen doch ebenso wirken, als wenn ihre ganze Kraft im Zentrum des Kugelelementes konzentrirt wäre. Die Ausdehnung des Elementes ist also in dynamischer Hinsicht eine reine Nullität, ein unnöthiges Zuviel.

Vorerst ist klar, dass zwei solcher Kraftpunkte nie zur Berührung gelangen können, weil dort ihre abstossende Kraft ∞ wird. Ihre Konstanz als Element ist also gesichert; wogegen bei anziehenden Grundkräften Alles im Laufe der Zeit in einen einzigen Punkt zusammengezogen werden würde, wofern man nicht wiederum neue abstossende Kräfte oder ihnen gleichbedeutende neue Grundeigenschaften der Materie, wie Härte, Elastizität, Undurchdringlichkeit etc. einführen wollte.

Einen Versuch, die Wirkung des Aethers auf eines seiner verschobenen Elemente zu berechnen, finden wir bei Cauchy[1]. Derselbe denkt sich zu diesem Zwecke den Aether um das verschobene Theilchen in konzentrischen Schichten geordnet und berechnet sodann die Wirkung einer Kugelschaale von Radius $r = \infty$ bis $r = o$ durch Integration. Hierdurch kommt er dazu, die ganze Summenwirkung der Aetherpunkte auf einen einzelnen einem dreifachen Integral gleichzusetzen. Dieser Operationsmodus enthält zwei Fehler. Erstens ist eine solche Anordnung des Aethers gar nicht möglich; denn ein jeder Punkt müsste dann eine andere Reihe ihm zugeordneter Kugelschalen erhalten, d. h. ein jeder Ort des Raumes müsste in einem besonderen Aether liegen. Zweitens ist es auch nicht erlaubt, im Allgemeinen die Wirkungen der einzelnen Kugelschalen durch Integrale auszudrücken. Bei grossen Entfernungen vom verschobenen Punkte ist dies allerdings zulässig, aber nicht bei kleinen, wo die mittlere Distanz der Aetherpunkte ein messbares Verhältniss zu dem betrachteten Kugelradius hat. Es wird nun im Folgenden gezeigt werden, dass grade die Punkte der nahen Entfernungen über die Wirkung auf den verschobenen Punkt entscheiden, die Wirkungen grösserer Distanzen dagegen sich gegenseitig aufheben.

---

[1]) Memoire sur la dispersion de la lumière.

Ganz verkehrt wäre es aber, jenes Integral Cauchy's

$$Sm\varphi(r) = \int_{r_0}^{r_\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \varphi(r) \sin p dp dq dr,$$

worin p und q die Winkel des Polarkoordinatensystems, damit vertheidigen zu wollen, dass der Aether überhaupt als ein Kontinuum betrachtet werden könne. Denn in diesem Falle wäre überhaupt keine Bewegung und Wirkung möglich, weil der Druck an jeder Stelle ∞ würde. Cauchy kam wohl zu dieser Auffassung, weil er die Integralrechnung für ein überall brauchbares Instrument hielt, welches die logisch verkehrten Voraussetzungen wieder gut mache, ähnlich wie bei Rektifikation der Kurven. An eine kontinuirliche Ausdehnung irgendwelcher Materie dachte er nicht, sondern betonte stets, dass eine mechanische Erklärung auf Wirkungen von Kraftzentren mit leeren Zwischenräumen gegründet werden müsse.

Spätere Physiker sind deshalb bei den Summenausdrücken stehen geblieben,[1]) ohne jedoch — meiner Ansicht nach — einen Theil von Cauchy's Fehlern zu vermeiden. Jene Summenausdrücke schreiten nach Distanzen fort; setzen also voraus, dass die verschiedenen Kugelflächen homolog geordnete Aetherelemente, der Zahl nach proportional diesen Flächen, enthalten. Das ist aber bei den nächsten und für die Wirkung allein entscheidenden Flächen beides nicht der Fall, wie man sich durch Abzählen an der Zeichnung eines regelmässigen Systems leicht überzeugen kann. Wollte man diesem Mangel der Summationsformel abhelfen, so müsste man ihr die Gleichung der Punktfolge nach Lage und Anzahl bei einem bestimmten System der Gruppirung einfügen. Mit einer solchen Aufgabe dürfte aber wohl die Leistungsfähigkeit der heutigen Analyse überschritten werden. Die praktische Anwendung einer solchen komplizirten Formel würde jedenfalls mühseliger sein als eine direkte Berechnung, welche hier unternommen werden soll.

Werde ein Quadrat (Fig. 1.) von 4 festen Kraftpunkten gebildet. Ein fünfter c befindet sich dann im Zentrum im Gleich-

---

[1]) Wittwer, die Molekulargesetze. Leipzig 1871.

gewicht. Werde c vom Zentrum um x senkrecht zu mm, verschoben, so wirken diese beiden letzteren auf c mit einer Kraft

$$\varphi_m = \frac{1}{1 + (1 - x)^2} \cdot \frac{1 - x}{2 - x} \tag{1}$$

die Hälfte der Quadratseite gleich der Einheit gesetzt. Die Kurve α zeigt in ihren zu x senkrechten Ordinaten die Werthe für das zugehörige φ; in Zahlen, für spätere Fälle, mit $\varphi = 100$ in der Entfernung 1 gesetzt

$oc =$	$\varphi =$
0,1	9,0
0,2	16,2
0,3	21,1
0,4	24,6
0,5	26,6
0,6	27,57
0,7	27,63
0,8	27,1
0,9	26,1
1,0	25,0
1,1	24,0
1,2	22,35
1,3	20,9
1,4	19,7
1,5	18,5
1,6	17,3
1,7	16,2
1,8	15,2
1,9	14,2
2,0	13,3.

Gleichung (1) differenzirt $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ gesetzt, $2x^3 + x^2 = 1$.

Daraus folgt ein Maximum bei $x = 0,656$
mit $\varphi = 27,7$.

Die Wirkung der 4 Punkte auf den um x verschobenen

$$\varphi_m - \varphi_\mu = \frac{1}{1+(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{2-x} - \frac{1}{1+(1+x)^2} \cdot \frac{1+x}{2+x} \tag{2}$$

deren Kurve β die Werthe der Gesammtkraft

x	$\varphi_m - \varphi_\mu$
$x = 0$	$\varphi_m - \varphi_\mu = 0$
$= 0{,}1$	$= + 2{,}10$
$= 0{,}2$	$+ 4{,}55$
$= 0{,}3$	$+ 6{,}73$
$= 0{,}4$	$+ 7{,}87$
$= 0{,}5$	$+ 8{,}14$
$= 0{,}6$	$+ 7{,}35$
$= 0{,}7$	$+ 4{,}92$
$= 0{,}8$	$+ 1{,}04$
$= 0{,}9$	$- 5{,}21$
$= 1{,}0$	$- 13{,}33.$

Von Interesse ist der Nullpunkt s der Kurve β, an welchem $\varphi_m - \varphi_\mu$ von einer anziehenden in eine abstossende Kraft übergeht. Derselbe wird bestimmt durch die Gleichung (2), wenn ihre rechte Seite der Null gleich gesetzt ist; also durch

$$6x^3 - 4x = 0$$
$$x = 0{,}82.$$

Dies zeigt eine hinreichende Uebersicht der Bewegung eines Punktes zwischen vier quadratisch gelagerten. So lange er nicht über die punktirte Nullinie $\omega\,\omega$ verschoben, wird er stets nach dem Zentrum zurückgetrieben, hat also eine sehr stabile Lage. Zu bemerken ist, dass die β Kurve nahe dem Zentrum fast eine gerade Linie bildet, was bei den Lichtschwingungen näher erörtert werden wird.

Setzen wir jetzt einen in Bezug auf drei zueinander senkrechte Axen homolog gruppirten Aether voraus, analog irgend einem tesseralen Kristallsystem, verschieben einen seiner Punkte in irgend einer Richtung, und denken uns eine Ebene senkrecht zu dieser Verschiebung durch seinen Ruhepunkt gezogen, so wird die Gesammtwirkung des Aethers zusammengesetzt sein aus der Wirkung von Punktpaaren, deren Lage in Bezug auf diese Ebene gleich und entgegengesetzt ist, analog der Lage der Punkte $m\,\mu$ oder $m\,\mu,$ zur Ebene $b\,c\,b,$. Wir erhalten demnach für die Gesammtwirkung des Aethers eine Summe von $\varphi_m - \varphi_\mu$ mit gleich grossen, entgegengesetzt gerichteten Ordinaten für die Punkte eines jeden Paares.

Alle Punktpaare, welche innerhalb des Doppelkegels fallen, dessen Kante mit der Grundebene einen Winkel arc. tang = 0,656

bildet (entsprechend dem Maximumwerthe von φ), treiben den verschobenen Punkt nach seiner Ruhelage zurück; alle Paare ausserhalb des Doppelkegels treiben ihn weiter in seiner Verschiebung. Berechnet man hiernach die Wirkung der aufeinanderfolgenden Kugelschalen, so findet man, dass die Stabilität eines verschobenen Punktes nicht durch die entfernteren Schichten geändert wird, und dass die Gesammtwirkung der ganzen Schale mit Vergrösserung des Radius sehr rasch abnimmt. Diese Abnahme erfolgt dadurch, dass die Punkte einer Kugelschale in ihrer Wirkung auf den verschobenen Zentralpunkt desto mehr sich ausgleichen, je grösser ihre Anzahl ist; wie denn ja eine kontinuirliche Hohlkugel für jede Grösse des inneren Radius auf einen inneren Punkt durchaus keine Wirkung ausübt. Legen wir konzentrische Kugelflächen durch die Nachbarpunkte eines verschobenen in unserem Aether, so ist die Abnahme der Wirkung dieser aufeinanderfolgenden Flächen anfangs sehr unregelmässig, weil die Lage der Aetherpunkte auf ihnen nicht homolog ist. Von der Fläche mit Durchmesser von $10\,\delta$ an beginnt eine ziemlich homologe Lage dieser Punkte und vergrössert sich ihre Anzahl annähernd wie die Fläche. Unter diesen letzteren Bedingungen ergiebt die Rechnung, dass die Wirkung der aufeinander folgenden Kugelflächen auf den Punkt c abnimmt annähernd wie die fünfte Potenz des Radius. Wir können also sagen, dass die Wirkung aller in einer gewissen Entfernung $\mathfrak{D}$ von c befindlichen Punkte des Aethers Null ist, und die Bewegung eines verschobenen Aetherelementes lediglich durch seine innerhalb $\mathfrak{D}$ befindlichen Nachbaren bestimmt wird. Um hierfür einen Anhaltspunkt in Zahlen zu geben, werde etwas willkürlich $\mathfrak{D} = 1000\,\delta$ gesetzt; wobei δ die mittlere nächste Distanz der Aetherelemente bedeutet, bei unserem oktogonal geordneten Aether also die Kantenlänge des Elementaroktaeders. $\mathfrak{D} = 1000\,\delta$ sagt demnach, dass der Unterschied in der Wirkung von $1 : 1000^5$ für hieraufbezügliche physikalische Beobachtungen unmessbar ist. Wie gesagt ist diese Zahl vorab willkürlich, und kann beliebig geändert werden, sofern Beobachtungen dies erfordern.

Zu einer ähnlichen Uebersicht über die Stabilitätsverhältnisse des Aethers gelangt man durch Betrachtung der Nullinien, welche die Nachbaren eines verschobenen Punktes in Bezug auf diesen

bilden. Diese Linien sind für den ersten Würfel die Kurven ω im Diagonalschnitt des Würfels, die Kurven ψ in dem Schnitt senkrecht zu den Würfelflächen. Innerhalb der durch diese Kurven gebildeten Fläche doppelter Krümmung ist demnach c stabil. Bildet man jetzt die Nullfläche für das den Zentralwürfel umgebende nächste Punktsystem von 26 Würfeln, so findet sich, dass die Nullkurven dieses Systems jene erstere Fläche nirgendwo schneiden, d. h. dass die Stabilität des Punktes c durch jene nicht verringert wird. Die Wirkung der entfernteren Würfelsysteme nimmt dabei in ähnlicher Weise ab, wie diejenige der vorhin betrachteten Kugelflächen.

Wir erhalten demnach folgendes Resultat:

> In einem System von Kraftpunkten (dem Aether), dessen Elemente nach dem Gesetz $-\frac{1}{r^2}$ aufeinander reagiren, sind alle tesseralen Gruppirungen stabil. Ein jeder Punkt wird aber nur durch seine nächsten Nachbaren in dieser Stabilitätslage gehalten. Alle Wirkungen der über die Entfernung $\mathfrak{D}$ hinaus von einem gestörten abliegenden Punkte gleichen einander aus.

Aus diesem Resultate werden sich die scheinbar unvereinbaren Eigenschaften des Aethers ableiten lassen, welche die Physik sich gezwungen sieht, demselben beizulegen, nämlich: eine ungeheure Starrheit des Aethers unter gewissen Umständen, und eine vollkommene Flüssigkeit unter anderen. Die weiteren Eigenschaften des Aethers werden auf den speziellen Gebieten erörtert, welche zu deren Auftreten Veranlassung geben.

III.

Das Körperatom.

Als Grundeigenschaft der körperlichen Materie, sowie des Körperatoms der Chemiker können wir bezeichnen, dass sie allen uns wahrnehmbaren Veränderungen, allen zu unserer Disposition

stehenden vereinigenden oder zersetzenden Kräften gegenüber ein konstantes Dasein behauptet. Diese Definition reicht ebensogut für die wahrnehmbare greifbare Masse wie für die theoretische Abstraktion des nicht wahrnehmbaren Atoms aus. Da nach unserer Hypothese nur Kraftpunkte in verschiedenen Bewegungszuständen existiren, so steht uns nicht die bisher übliche bequeme Methode zu Gebote, aus harten, untheilbaren Körperchen Materie zu konstruiren oder willkürlich sogenannte Dynamidensysteme[1]) aufzubauen, welche Körperatome genannt werden, und zu deren mechanischer Konstanz verschiedene neue Kräftesorten nothwendig wären. Wenn aus unseren Kraftpunkten ohne Zuhülfenahme neuer Kräfte keine konstanten Gebilde konstruirbar sind, so taugt unsere Hypothese nichts. Diese Konstruktion ist aber möglich.

Hat ein Punkt des Aethers eine hinreichend grosse kinetische Energie A, um aus der Gleichgewichtslage die Nullinie seiner nächsten Nachbaren zu überschreiten, so wird er auf seiner Bahn auch die Nullinie jeder anderen Nachbaren überschreiten, sofern deren geometrische Lagerung dieselbe bleibt. Denn von der durchbrochenen Nullinie bis zum Gleichgewichtpunkte der nächsten Zelle erhält er wieder die ganze kinetische Energie, welche er von dem vorigen Gleichgewichtspunkte bis zur Nullinie verloren hatte. In einem homolog gebauten Aether kann ein Punkt, dem ein solches Bewegungsmoment ertheilt wird, oder es ursprünglich besitzt, nie zu einem Ruhezustande gelangen. Besitzt eine Gruppe solcher zunächstliegender Punkte das A entsprechende Bewegungsmoment, und wird diese Gruppe durch eine Kraft in ein und derselben Lage zusammengehalten, so dass eine Zerstreuung der Kraftpunkte im Aether verhindert bleibt, so wird diese Gruppe allen ähnlichen gegenüber die Erscheinungen der harten, stossenden, greifbaren Materie zeigen, welche sich im Aether wie in einem leeren Raume bewegt. Werden zudem durch die besondere Struktur dieser Gruppen Wechselwirkungen zwischen denselben erzeugt, welche dieselben nach ihrem gemeinschaftlichen Massenpunkte hindrängen, so ist dies gleich den Erscheinungen der Schwerkraft. Es soll nun gezeigt

[1]) Eine durch Redtenbacher inaugurirte Hypothesenmanier, die ihrer kühnen, an die mechanischen Grundbegriffe erinnernden Wortbildung halber viele Nachfolger fand.

werden, dass gewisse Strukturen und Bewegung solcher Gruppen alle diese Eigenschaften der widerstandsfähigen ponderabelen Materie aufweisen können, ohne dass ihren Elementen eine andere Eigenschaft zugesprochen wird als die Kraft $-\frac{1}{r^2}$.

Infolge des Gesetzes $-\frac{1}{r^2}$ kann ein Kraftpunkt mit beliebig grosser kinetischer Energie eine Reihe solcher nicht durchbrechen, wenn der Winkel seiner Bewegungsrichtung mit der Richtung jener Reihe hinreichend klein ist, sondern er wird von jener Reihe dem Reflexionsgesetze entsprechend zurückgestossen. Eine im Aether rotirende Kreisebene von Kraftpunkten wird deshalb einen stabilen Komplex bilden, wenn ihr Durchmesser bei einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit hinreichend gross, und die Potenzialenergie ihrer Kraftpunkte vermehrt um ihre Drehungsenergie gleich ist der Potenzialenergie einer gleich grossen Fläche des äusseren Aethers; mit anderen Worten, wenn die rotirende Kreisfläche eine gewisse Anzahl weniger Kraftpunkte aufweist als eine gleich grosse Fläche des umgebenden Aethers. Wegen der absoluten Elastizität der Kraftpunkte kann ein solcher einmal rotirender Komplex nie etwas von seiner Drehungsenergie verlieren, einige später zu besprechende Spezialfälle ausgenommen, welche hier von keiner Bedeutung sind.

Um die verschieden möglichen Drehungskomplexe darzustellen, denken wir uns eine Kugel von Kraftpunkten und ertheilen derselben eine stets rascher werdende Rotation um einen ihrer Durchmesser. Die Kugel wird sich ellipsoidisch abplatten, in Folge der Zentrifugalkraft an Volum zunehmen und ihre Punkte an der Oberfläche dichter gruppiren, als im Innern. Bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit wird das Ellipsoid sich an den Polen trichterförmig einsenken und in eine Ringfigur übergehen. Ellipsoidische konstante Systeme sind also nur bis zu einer gewissen Rotationsgeschwindigkeit, resp. Verdünnung des Zentrums, möglich.

Denken wir uns dagegen eine Gruppe von Kraftpunkten in Ringform mit kreisförmigem Querschnitt und einer Rotation in (Fig. 2.) dem Querschnitt BCB, so ist ein solcher Komplex unter den vorhin angegebenen Verhältnissen stabil für eine jede Rotationsgeschwindigkeit und deren zugehörige Verdünnung.

Ein solches Ringatom (Fig. 2) könnte ausser seiner Rotation im eben besprochenen Querschnitt auch noch eine solche in der dazu senkrechten Ebene um die Axe A des Ringes haben. Ein solches Atom wäre nach jeder Richtung hin starr. Fehlt die letztere Rotation, so hat es eine vom Verhältnisse der Durchmesser BB und CC zu einer gewissen Distanz $\varDelta$ (welche bei Kohäsion definirt wird) abhängige Biegsamkeit, nebst ähnlichen anderen Eigenschaften, welche die sog. Molekularkräfte beeinflussen. Für die Aufstellung allgemeiner Grundzüge genügt die Erörterung des Ringatoms mit kreisförmigem Querschnitt, womit natürlich nicht die Möglichkeit anderer Formen bestritten werden soll.

Um keine zu engen Grenzen zu setzen für die hier möglichen Verschiedenheiten, werde der Durchmesser BB als ziemlich gross im Verhältniss zu δ, der mittleren Distanz zwischen den Kraftpunkten, vorausgesetzt. Ein Verhältniss $\delta : BB = 1 : 100$ bis 10000 dürfte wahrscheinlich für alle Zwecke der Physik genügen, obgleich kein Hinderniss vorliegt, dies Verhältniss beliebig zu vergrössern. Eine Maximumgrenze dieses Verhältnisses existirt gewiss, abhängig von der Distanz $\mathfrak{D}$; ob auch ein Minimum existirt, kann vorab nicht entschieden werden.

Wie gesagt, erfordert die Stabilität des Atoms, dass die durch Verdünnung desselben verminderte Potenzialenergie an jedem Orte ersetzt werde durch Drehungsenergie. Druck, Dichte und Drehungsmoment des Atoms werden also bestimmt durch die Formeln der Zentrifugalkraft. Diese letztere wächst wie der Radius. Um die Dichte der verschiedenen Stellen des Atoms zu bestimmen, haben wir demnach das Gesetz zu suchen, nach welchem sich die Dichte des Aethers bei wachsendem Drucke verändert.

Denken wir uns eine Kugel von ruhenden Kraftpunkten mit der mittleren Distanz δ und dem Radius R. Drücken wir dieselbe auf den Radius r zusammen, so wird die mittlere Distanz ihrer Kraftpunkte gleich $\delta \cdot \frac{r}{R}$. Der Druck, mit welchem beide Kugeln auf ihre Oberfläche wirken, ist derselbe, als wenn ihre ganze Masse im Zentrum vereinigt wäre, weil diese Massen aus Kräften von der Form $\frac{1}{r^2}$

gebildet sind. Der Druck muss aber derselbe an jedem Punkte der Kugel sein. Wir erhalten also das Gesetz:

> „Die lineare Dichte des Aethers wächst wie das Quadrat des Druckes, dem er unterworfen wird",

ein Gesetz, welches eine ungemein häufige Anwendung finden wird.

Die Dichte der verschiedenen konzentrischen Schichten des Atoms wächst demnach wie die Quadratwurzel ihrer Radien.

Die Dichte des Atoms, sowohl seine mittlere, wie diejenige seiner verschiedenen Theile, ist also eine bestimmte Funktion aus seinem Radius und der Winkelgeschwindigkeit. Die Berechnung eines bestimmten Falles wird für die Uebersichtlichkeit des Folgenden zweckmässig sein.

Suchen wir die Winkelgeschwindigkeit, welche nothwendig sein würde, damit der Querschnitt des Atoms aus einem einzigen Kreise von Kraftpunkten in Abstand δ bestehen könnte, die innere Dichte des Atoms also gleich Null wäre. Die Masse des Querschnittes wäre in diesem Falle $\frac{2\delta}{R}$. Ist R gross im Verhältniss zu δ, so können wir die Potenzialenergie dieser Masse vernachlässigen. Es handelt sich also darum, die Drehungsenergie des Querschnitts zu finden, welche der Potenzialenergie einer ebenso grossen Fläche gleich wäre. Offenbar müsste zur Sicherung der Stabilität dieser Kreislinie die Geschwindigkeit ihrer Punkte eine solche sein, dass sie die halbe Peripherie in derselben Zeit zurücklegen, welche ein Aetherpunkt gebrauchen würde, um den Durchmesser dieses Kreises unter vollem Aetherdrucke zu durchlaufen. Diese letztere Geschwindigkeit ist uns gegeben durch die Fortpflanzung des Lichtes (L), weil diese die Zeit angiebt, welche der Aether gebraucht, um auf eine Störung zu reagiren. Wir erhalten also nach den Formeln der Zentrifugalkraft

$$v = \pi R L\,; \varphi = \frac{mv^2}{R} = \pi^2 RL,$$

weil m an der Peripherie unseres Kreises gleich 1 ist, die lineare Dichte des äusseren Aethers hat. Wäre die Drehungsgeschwindigkeit die doppelte von L, so würde der Abstand der Kraftpunkte des Kreises $= \delta\sqrt{2}$ sein müssen.

Ein sehr wichtiger Punkt dieser ganzen Konstruktion ist noch hervorzuheben, welcher bei allen folgenden Untersuchungen beständig im Auge behalten werden muss. Es ist nämlich ein grosser Unterschied, ob wir uns von Anfang an Aether und Atome als gegeben denken, oder aber so, als ob der Weltraum anfänglich mit Aether angefüllt gewesen und später durch Einführung kinetischer Energie die Atome gebildet worden wären. Das letztere wäre die Bildung von Unterschieden im Unterschiedlosen, der Wahrnehmung gegenüber eine Schöpfung aus dem Nichts. Wären die Atome auf diese Weise gebildet worden, dann würden sie nicht allein dem früheren Aether gegenüber die eben erörterte Struktur angenommen, sondern der äussere Aether selbst eine Veränderung erfahren haben müssen. Der letztere wäre dann in seinen dem Atom näheren Schichten verdichtet worden, und würde Spannungsflächen bilden, welche unter dem Kapitel Elektrizität zu betrachten sind. Denken wir uns dagegen Aether und Atome von Anfang an gegeben, so heisst dies in der Sprache unserer Konstruktion: der Aether hat überall ausserhalb der Atome dieselbe lineare Dichte, keine Spannungen, und der Abstand seiner dem Atom nächsten Kraftpunkte ist δ wie überall anderswo. Dem Prinzip von der Erhaltung der Kraft zufolge, welches, wie später dargelegt, ein rein logischer Satz ist, kann nun kein Zweifel darüber bleiben, welche von diesen beiden Anschauungen wir zu adoptiren haben.

Die Unterschiede, potenziale und kinetische Energie, Körperatome und Aether, müssen von Anfang an existirt haben, sonst wäre der anfängliche Kraftvorrath um eine neue Grösse vermehrt worden. In dieser Existenz der Atome inmitten eines nicht nach verschiedenen Richtungen verschieden gespannten Aethers liegt auch die Bedingung ihrer Konstanz, ihrer Unveränderlichkeit durch den Druck des Aethers. Ebensowenig können die Atome durch Bewegung, Zusammenstoss etc. als Gruppe dauernd verändert werden, in chemischer Beziehung Schaden leiden. Unmittelbar berühren können sie sich ebensowenig wie die Aetherpunkte; mit wie grosser kinetischer Energie sie auch aufeinanderprallen, bei einer gewissen Annäherung werden sie wie absolut elastische Räder voneinander schnellen.

In dieser Vorstellung von der Struktur eines Körperatoms

liegt nichts, was für eine Gleichheit aller materiellen Atome spräche, (einer identischen Struktur der Atome chemisch verschiedener Elemente) in dem Sinne wie eine solche von vielen Chemikern für wahrscheinlich gehalten wird. Prinzipiell einander gleich sind nur die Kraftpunkte. Anderntheils wird aber auch die Möglichkeit der gestalt-gleichen Atome chemisch verschiedener Elemente nicht bestritten.

IV.

Bewegung der Körper im Aether.

Denken wir uns eine Kugel von Aetherpunkten (mit Durchmesser R) durch irgend eine Ursache zu einem starren Ganzen verbunden, so wird deren stabile Lage innerhalb des umgebenden Aethers bestimmt durch die Grösse der ihr zunächstliegenden Kugelschale des freien Aethers mit Durchmesser $R + 2\delta$, da δ der mittlere Abstand der Aetherpunkte ist. Nach den Ausführungen Kap. III vermindert sich diese Kraft, mit welcher R bei einer Verschiebung nach dem Mittelpunkt von $R + 2\delta$ zurückgestossen wird, sehr rasch mit der Grösse von R (ungefähr wie $\frac{1}{R^5}$) und wird Null, wenn δ gegenüber R vernachlässigt werden darf.

Diese Distanz, bei welcher physikalischen Messungen gegenüber δ vernachlässigt werden darf, wurde $\mathfrak{D}$ genannt.

Eine starre Kugel von Durchmesser $\mathfrak{D}$ kann sich also in der umgebenden Hohlkugel $\mathfrak{D} + 2\delta$ bis zur Berührung bewegen, ohne zurückgestossen zu werden. Denn für jeden vom Zentrum verschiedenen Punkt, auf welchen die umgebende Kugelschale eine Wirkung ausüben könnte, haben wir in der inneren Kugel einen entgegengesetzten Punkt, auf welchen die gleiche und entgegengesetzte Kraft wirkt. Da der umgebende Aether aber nicht starr, sondern innerhalb seiner Elastizitätsgrenzen frei ist, so wird er an der Stelle, wo durch Bewegung der Kugel $\mathfrak{D}$ die Entfernung 2δ

entstand, der Kugel folgen, und an der gegenüberliegenden Seite sich um δ von $\mathfrak{D}$ zurückziehen, dadurch eine neue Hohlkugel von Durchmesser $\mathfrak{D} + 2\delta$ um die verschobene bilden und der Erneuerung desselben Vorgangs, d. h. der freien Bewegung von $\mathfrak{D}$ kein Hinderniss entgegensetzen. Mit anderen Worten: eine Kugel von Durchmesser gleich oder grösser als $\mathfrak{D}$ bewegt sich im Aether wie in einer vollkommenen Flüssigkeit.

Betrachten wir jetzt irgend ein anderes starres Volum, welches an keiner Stelle seiner Oberfläche Krümmungsradien kleiner als $\mathfrak{D}$ besitzt, so kann ein jeder Theil dieses Volums betrachtet werden als Theil einer Kugel von Radius $> \mathfrak{D}$, welche demgemäss an jeder Stelle des Raumes und bei jeder Verschiebung dem äusseren Aether gegenüber eine indifferente Gleichgewichtslage hat. Denn zu diesem Gleichgewichte ist es ganz einerlei, ob die $\mathfrak{D}$ umgebende Hohlkugel $\mathfrak{D} + 2\delta$ aus Theilen des freien Aethers, oder des starren Volums oder aus Theilen beider besteht, sofern bei dem starren Volum pr. Raumeinheit dieselbe Potenzialenergie vorausgesetzt wird, wie für den freien Aether. Ein solches starres Volum von irgend welcher Form bewegt sich also widerstandslos im Aether.

Es möge hier an die Resultate einiger hydrodynamischer Gleichungen erinnert werden. Zufolge derselben bewegen sich in einer vollkommenen Flüssigkeit, welche ihren Bewegungszustand nicht ändert, alle kugelförmigen Körper so, als wenn jene Flüssigkeit nicht existirte. Dieser Satz ist nach den gegebenen Konstruktionen anwendbar auf das Ringatom von Durchmesser $> \mathfrak{D}$ und seine Bewegung im Aether.

Diese freie Bewegung des Atoms oder Atomkomplexes besteht dagegen nicht in folgenden Fällen:

a) wenn die Geschwindigkeit der Bewegung eine gewisse Grenze überschreitet;

b) wenn der Körper oder der Aether seinen Bewegungszustand ändert;

c) wenn die Umgebung des Körpers nicht nach allen Richtungen hin gleichartig ist. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

α) es befinden sich noch andere Körper im Beobachtungs-

felde, und demzufolge Stellen geringerer Potenzialenergie im umgebenden Aether;

β) Stellen des den Körper umgebenden Aethers werden durch irgendwelche Ursachen beeinflusst, sodass seine Elastizität nicht überall die gleiche ist. In diesem Falle müssen bei jeder Bewegung nach verschiedenen Richtungen verschiedene Spannungen entstehen, welche die Bewegung verändern.

Die in a) angedeutete Grenze ist die Lichtgeschwindigkeit (L). Denn würde der Körper sich rascher als das Licht fortbewegen, so könnte der Aether nicht mehr ebensorasch folgen; der Druck vor und hinter dem Körper würde also verschieden sein. Bei allen Geschwindigkeiten $v < L$ bewegt sich der Körper frei. Auf die Geschwindigkeit, mit welcher der Aether sich hinter dem Körper zusammenschliesst, kommt es nicht an, sondern nur darauf, dass die Bewegung des Körpers nicht so rasch ist, dass ein leerer Raum entsteht; dies aus dem Grunde, weil der Aether nicht durch sein kinetisches Moment wirkt wie die Gase, sondern dadurch, dass er überhaupt da ist, durch seine Potenzialenergie. Für gewisse Fälle kann man sich auch die Bewegung des Körpers durch den Aether vorstellen als ein Gleiten durch einen absolut elastischen Schlauch ohne Reibung. Die zum Oeffnen des Schlauches vor dem Körper nothwendige Kraft wird vollständig wiedergewonnen durch das Schliessen desselben hinter dem Körper. Die Umstände, unter welchen diese Anschauung die richtige ist, werden weiter unten behandelt. Es wird dort sich zeigen, dass bei Bewegung der Körper durch den Aether der letztere die Körper durchfliesst, weil er sich auf Aequipotenzialflächen der Kohäsion zwischen den Atomen widerstandslos fortbewegen kann.

Fall b) ist unter Licht (Kap. VII) zu erörtern. Fall c. α) unter Gravitation, c. β) bei Kohäsion und Elektrizität.

V.

Gravitation.

Die Körperatome sind zufolge Kap. III an Kraftpunkten resp. Potenzialenergie ärmer als ein gleiches Aethervolum. Befinden sich also zwei Atome im Raume, so ist der Druck des Aethers auf ein jedes derselben in der sie verbindenden Richtung geringer als in jeder andern; folglich muss Bewegung derselben eintreten. Seien A und B (Fig. 3) die beiden Atome. Der Aetherdruck ausserhalb und innerhalb des Ringes XZ auf A gleicht sich nach jeder Richtung aus. Ebenso der Druck aller Theile des Ringes XZ mit Ausnahme von dem Atom B und seinem gleichen entgegengesetzt zu A liegenden Aethervolum $B_,$. Die Wirkung dieser beiden Theile auf A ist

Abstossung oder Druck von $B_,$ auf $A = B_, \,.\, A\,(-\frac{1}{r^2})$

„ „ B „ $A = B \,.\, A\,(-\frac{1}{r^2})$

Deren Summe, da die Richtungen entgegengesetzt sind,

$$B_,A + BA = B_,A\,(-\frac{1}{r^2}) - B\,.\,A\,(-\frac{1}{r^2})$$

Da $B_,$ dichter, d. h. algebraisch grösser als B, so ist die Richtung der Bewegung zwischen A und B, welche aus diesen Abstossungen erfolgt, zueinander hin.

Da dieselbe Betrachtung für $BA_,$ gilt, so erhalten wir für die Summe S der Wechselwirkung zwischen A und B

$$S = (A_, - A)\;(B_, - B)\;(-\frac{1}{r^2})$$

also eine anziehende Kraft der Atome umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung, und direkt dem Produkt ihrer Aetherverdünnung. Die Potenzialenergien $A_, - A$ und $B_, - B$ sind also die ponderabelen Massen dieser Atome; die Verhältnisse

$$(A_, - A) : (B_, - B)$$

ihre spezifische Dichte.

$$\frac{A_{,}-A}{A} \text{ und } \frac{B_{,}-B}{B}$$

wäre die absolute Dichte der Atome, d. h. der Grad von Aetherverdünnung, wenn das vollständig ätherleere Volum als schwerster Körper = 1 gesetzt wird. Die absoluten Dichten unserer leichtesten und schwersten Körper sind wahrscheinlich wenig verschieden, d. h. in allen Körpern nimmt der freie Aether verhältnissmässig den grössten Theil des Körpervolums ein. Die Atome haben möglicherweise in allen chemischen Elementen gleiche Dichte. Eine Möglichkeit, die absoluten Dichten zu bestimmen, folgt weiter unten.

VI.

Kohäsion.

Denken wir uns inmitten des Aethers eine starre Röhre (Fig. 4.) unten bei o geschlossen, oben bei $o_{,}$ offen. In derselben bewege sich ein Stempel s. Wenn die Röhre oder irgend etwas Aehnliches in der Wirklichkeit existiren soll, so kann sie der Grundhypothese zufolge nur aus Kraftpunkten gebildet sein. Wir denken uns also ihre Figur, sowie den Stempel s aus solchen Punkten im mittleren Abstand δ gebildet und durch irgend eine Ursache allen Veränderungen des inneren und äusseren Aethers gegenüber in dieser Form bewahrt. Der Stempel s befindet sich dann in der Distanz $s\,o = \delta$ von o in einer Gleichgewichtlage. Ebendort habe die Röhre eine Oeffnung b, wodurch der äussere Aether in die Röhre eindringen kann. Bewegt sich jetzt der Stempel aufwärts, so entsteht zwischen s und o ein ätherverdünnter Raum, denn der äussere Aether kann nicht eher in die Röhre eindringen, bis s die Lage $s_{,}$ mit $s_{,}\,o = 2\,\delta$ erreicht hat,[1]) Der Stempel s wird also auf dem ganzen Wege von s bis $s_{,}$ mit dem vollen Aetherdruck belastet.

---

[1]) streng genommen: bis der Stempel die Nullinie zwischen zwei Aetherschichten erreicht hat.

Zur Berechnung dieser Kraft dient das (Kap. II) gefundene Verhältniss des Aethers.

$$\Psi : \varphi = D^2 : d^2 \text{ oder}$$

der Druck des Aethers wächst wie das Quadrat seiner linearen Dichte. Für den hier vorliegenden Fall heisst dies: Die Kraft, welche den Stempel aus einer Lage $s_n\, o$ in die Lage $s_{n+1}\, o$ treibt, wächst wie das Quadrat der Verdichtung oder Verdünnung des Aethers, welche bei dieser Lagenänderung stattfinden muss, also wie das Quadrat der Distanz $s_n\, o$.

Bewegt sich jetzt der Stempel s aus der Lage $s_,$ nach $s_{,,}$, so steht dieser Bewegung wiederum der Aetherdruck entgegen, bis er bei $s_{,,}$ mit $s_{,,}o = 3\,\delta$ eine neue Gleichgewichtlage erreicht hat. Für homologe Punkte zwischen diesen Gleichgewichtlagen giebt das eben gefundene Gesetz

$$\varphi : \varphi_n = \frac{1}{(s\,o)^2} : \frac{1}{(s_n\,o)^2}$$

Wollten wir umgekehrt den Stempel in die mit Aether gefüllte Röhre hineintreiben, so würde hierzu die gleiche Kraft wie vorhin, aber in umgekehrter Reihenfolge, nothwendig sein, weil dann eine Kompression des Aethers an der Ausflussöffnung eintritt. Um den Stempel s zu bewegen, ist demnach eine Kraft erforderlich, solange die Distanz δ zu dem Quadrat von $s_n\, o$ einen vergleichbaren Werth hat. Diese Distanz, ein Vielfaches von δ, möge Δ heissen.

Die gleiche Kraft wird nothwendig sein, wenn starre Aetherkomplexe, wie unsere Körperatome, in Entfernungen $< \Delta$ voneinander oder zueinander bewegt werden. Man kann demnach sagen: Atome reagiren innerhalb jener kleinen Distanz Δ gegen eine Annäherung mit einer rückstossenden, gegen eine Entfernung mit einer anziehenden Kraft. Hier sind also die mysteriösen Molekularkräfte, welche räthselhafter Weise zugleich anziehend und abstossend wirken sollen, als einfache Folge der Grundhypothese abgeleitet. Diese Kräfte haben allerdings nicht die einfache Form jenes Beispiels, wie es in der fiktiven Röhre gegeben wurde; denn sie müssen in ihrer Form abhängig sein von den Dimensionen, der geometrischen Gestalt und der gegenseitigen Lage der Atome. Eine Berechnung derselben wird ähnliche Formeln geben, wie die Potenzialfunktionen elektrisch geladener Ringe. Die Gründe

für diese Ansicht werden aus der folgenden Anschauung über Elektrizität folgen, welche sich aus unserer Hypothese entwickelt. Von dieser Molekularkraft, der Folge des Aetherdrucks, ist vorläufig nur ersichtlich, dass sie rascher abnehmen wird als das Quadrat der Distanz der Atome, weil deren Flächen nicht Ebenen sind, und die Distanzen von den Oberflächen aus, nicht von den Zentren der Atome gerechnet werden müssen; sodann, dass die Kohäsion mit der Grösse der Atome zunimmt, aber in einem viel langsameren Maasse als der Radius ihrer Querschnitte. Alle Abstufungen der Kohäsion, von der chemischen bis zur mechanischen Festigkeit gegen Zug, Druck und Verschiebung werden hieraus erklärbar sein, denn wie hoch auch immer der Aetherdruck in Entfernung δ angenommen werden müsste, um die stärkste chemische Kohäsion zu erklären, es würde dies nie gegen die nothwendigen Eigenschaften des Aethers verstossen, sondern nur das Verhältniss zwischen δ und Δ betreffen. Dahingestellt möge bleiben, ob auch die Gravitation einen dem Aetherdruck vergleichbaren Werth erlangen kann. Bei den Körpern ist dies natürlich nicht der Fall, weil ihre Dichte dem ganzen Raumvolum nach so wenig von dem Aether verschieden ist. Dagegen könnten, wie ausgeführt, die Atome möglicherweise eine von Null Aethermasse wenig verschiedene Dichte, und demnach die Konstanten dieser beiden Wirkungen einen vergleichbaren Werth haben.

Die Distanz Δ steht offenbar in einem Zusammenhange mit dem $\mathfrak{D}$ in Kap. IV. Für Kugelatome würde man annähernd erhalten

$$\mathfrak{D} : \Delta = n\delta : \sqrt{(n\delta)^5}.$$

Sie ist aber von der Gestalt des Atoms und, wenn auch die letzten Atome alle gleich sein sollten, doch immer noch von der Gestalt der Molekel (der Atomsysteme) abhängig, also für jedes Molekel eine andere. Δ steht ausserdem in naher Beziehung zu der Entfernung, welche in der kinetischen Gastheorie „Radius der Wirkungssphäre des Atoms“ genannt wird. Das weitere hierüber s. Kap. VIII. Um einen Anhaltspunkt für etwaige Zahlenbeispiele zu erhalten, setze ich $\Delta = 1{,}000{,}000\,\delta$, eine Verhältnisszahl von demselben Karakter wie der für $\mathfrak{D}$ bezeichnete.

VII.

Licht.

Die Lichterscheinungen im körperleeren Raume erfordern zu ihrer Erklärung ein Medium, welches

1) transversale Schwingungen zulässt, die
2) in jeder Richtung, und
3) für verschiedene Wellenlängen mit gleicher Geschwindigkeit sich fortpflanzen, dies letztere wenigstens in den Grenzen von Wellenlängen von 1 : 2.

In den Körpern muss dies Medium anders gestaltet sein, oder es muss durch die Körperelemente so beeinflusst werden, dass

4) schwingende Körpertheilchen dem Aether Schwingungen mittheilen, und vice versa
5) die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit in den Körpern geringer als im freien Raume,
6) diese Geschwindigkeit mit der geringeren Wellenlänge kleiner wird.

Ausserdem müssen sowohl im freien Raume wie in den Körpern

7) die Wellen einander ohne Störung durchsetzen können, gemäss dem Satze von der Superposition derselben.

Wir haben also zu sehen, ob der Aether des Kap. II diesen Bedingungen entspricht.

1. Die Lichtstrahlen im freien Aether.

Transversale Schwingungen sind in jedem Medium möglich, dessen Elemente nach allen Richtungen hin stabile Gleichgewichtslagen haben. Dass unsere Aetherelemente ihren nächsten Nachbarn gegenüber stabil liegen, wurde bewiesen. Die Wellenbewegung ist nun eine solche, welche ausschliesslich von der Reaktion der nächsten Nachbarn eines bewegten Elementes abhängt; denn die Eigenschaft des Aethers, vermöge welcher seine entfernteren Schichten nicht auf den verschobenen Punkt und die durch denselben erregte

Wellenbewegung einwirken, mit anderen Worten seine vollkommene Flüssigkeit für grössere Volumverschiebungen mit konstantem Bewegungsmodus, hebt, wie erörtert, seine den festen Körpern ähnliche Eigenschaft bei kleinen Verschiebungen nicht auf.

2. Gerade Strahlen im freien Aether.

Die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen erfordert, dass der Quotient von Dichte und Ausdehnung des Mediums in jeder Richtung derselbe sei. Denken wir uns den Aether in allen Theilen des Raumes nach einem und demselben Systeme gruppirt, so würde seine lineare Dichte in verschiedenen Richtungen verschieden sein. Gäbe es nur eine einzige stabile Struktur des Aethers, so würde er nach einer jeden Störung zu derselben zurückkehren und die nothwendige gleiche lineare Dichte nicht existiren. Es giebt aber sehr viele stabile Anordnungen des Aethers, und deshalb ist es schon unzulässig anzunehmen, dass irgend einmal im Laufe der Zeiten, oder am Anfang aller Zeiten eine einheitliche Anordnung seiner Elemente stattgefunden habe. Wäre aber dem auch so gewesen, so würden doch die in jedem Augenblicke und von allen Seiten aus eintretenden Störungen (s. Elektrizität) Veranlassung gegeben haben, an den verschiedensten Stellen verschiedene Neulagerungen jener Elemente zu bilden, woraus mit der Zeit sich die einheitliche lineare Dichte des Aethers für jede messbare Entfernung hergestellt haben müsste. Wir haben uns den Aether also nur in den kleinsten Entfernungen einheitlich gruppirt zu denken; eine jede messbare Distanz wird aus einer grossen Anzahl verschiedener tesseraler (und vielleicht noch anderer) Strukturen mit verschiedener Richtung ihrer Achsen zusammengesetzt sein. Alle diese verschiedenen linearen Dichten gleichen sich zu einer allgemeinen aus.

3. Dispersionslosigkeit des Aethers.

Diese Eigenschaft lässt sich, wie Cauchy zuerst gezeigt hat, auf ein Verhältniss der Elastizität zur Dichte des Aethers zurückführen. Gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit für verschiedene

Wellenlängen besteht, wenn diese Geschwindigkeit zunimmt wie die Wurzel aus der Dichte des Mediums,

wenn also $\qquad v = \sqrt{D}$

Da nun $\qquad v = \sqrt{\frac{E}{D}}$ Wellengleichung in elastischen Mitteln,

so erhalten wir $\quad D^2 = E.$

Kap. II fanden wir, dass der Druck des Aethers zunimmt wie das Quadrat seiner linearen Dichte. Druck und Elastizität desselben sind aber einander direkt proportional; oder wie man auch sagen kann: die Elastizität des Aethers ist die Kraft, mit welcher er seiner Verdünnung und Verdichtung, d. h. dem Druck, widersteht. Unser Aether genügt also der oben von Cauchy geforderten Bedingung. Dass Cauchy aus obiger Gleichung $v = \sqrt{D}$ für die Aetherpunkte Kräfte ableitet, welche der umgekehrten vierten Potenz der Entfernung proportional sind, liegt an der fehlerhaften Vorstellung, welche er sich von der Anordnung des Aethers macht, wie vorhin Kap. II auseinandergesetzt.

Aus unserer Hypothese kann die Dispersionslosigkeit des freien Raumes direkt folgendermaassen abgeleitet werden:

In Kap. II wurde gezeigt, dass alle Aetherpunkte in Bezug auf die Verschiebung eines einzigen aus seiner Gleichgewichtslage um die Entfernung ε in Gruppen von je zweien m und $m_,$ zerfallen, welche von der Ebene senkrecht zur Linie ε, dieselbe Distanz a auf den entgegengesetzten Seiten dieser Ebene haben. Sei c die Abscisse der Ordinate a beider Punkte m und $m_,$.

Setzen wir dieses $a = 1$ zur einfacheren Entwickelung der Formel, so wirken m und $m_,$ auf den um ε aus dem Gleichgewicht verschobenen Punkt mit der Kraft

$$\varphi - \varphi_, = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{(1+c-\varepsilon)} - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \cdot \frac{(1+\varepsilon)}{(1+c+\varepsilon)}$$

$$= \frac{2\,(c+2)\,\varepsilon - 2\,(c+2)\,\varepsilon^3}{(1+2c+c^2) - (3+4c+2c^2)\,\varepsilon^2 + (3+2c+c^2)\,\varepsilon^4 - \varepsilon^6}$$

Für kleine Ausweichungen können wir die höheren Potenzen von ε vernachlässigen, und erhalten

$$\varphi - \varphi_, = \frac{2\,(c+2)\,\varepsilon}{1+2c+c^2} = C \cdot \varepsilon$$

wobei C eine von den Koordinaten von m, m abhängige Konstante. Die Amplituden der Wellen können dabei sehr gross sein im Verhältniss zu der Grösse, um welche ein Punkt aus seiner Gleichgewichtslage den Nachbarpunkten gegenüber verschoben wird.

Die Summe aller Gruppen wirkt demnach mit der Kraft

$$S\varphi = (C + C_, + C_{,,} + \ldots\ldots) \, \varepsilon$$

d. h. proportinal der Verschiebung ε, wie schon die Kurve β Fig. 1., welche nahe dem Zentrum eine gerade Linie bildet, in der Anschauung andeutet.

Dieses Gesetz ist aber gerade dasjenige, welches die Mechanik als das einfachste Molekulargesetz annimmt, und woraus sie die Formel $v = \sqrt{\frac{E}{D}}$ ableitet, welche aussagt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen unabhängig von der Amplitude und Länge derselben ist. Gewöhnlich wird die Annahme einer elastischen Kraft proportional der Verschiebung mit den Erscheinungen bei Dehnung eines festen Körpers motivirt, und weiterhin gesagt, dass die Kraft der Elastizität bei kleinen Verschiebungen sich nach algebraischer Methode in einer Reihe von ganzen Potenzen der Verschiebung ε ausdrücken lasse. Die Vergleichung des Aethers mit einem festen Körper bleibt aber immer eine Hypothese, von der wir schon aus anderen Beobachtungen wissen, dass sie nicht allgemein erlaubt ist. Ebensowenig können wir apriori wissen, ob jene algebraische Methode hier zulässig ist, ob nicht vielmehr der genaue Ausdruck des physikalischen Vorgangs eine Reihe von Bruchpotenzen erfordert, und besonders, ob das erste Glied die erste Potenz von ε in jener Reihe überhaupt existirt. Von unserem Aether ist nun in Obigem nachgewiesen, dass dieses erste Glied als $(C + C_, + C_{,,} + \ldots.) \, \varepsilon$ wirklich existirt, und dass keine Bruchpotenzen von ε in der Formel vorkommen. Hiermit ist bewiesen, dass entgegen der herrschenden Annahme gerade für die kleinsten Distanzen das Gesetz von der quadratischen Abnahme der Kraft für Punktelemente besteht.

Es bleibt also nur noch übrig zu zeigen, dass auch die zweite bei dieser Herleitung gemachte Voraussetzung zulässig ist, nämlich dass die Länge der Wellen gegen die Verschiebungen der Punkte

gegeneinander, oder was dasselbe bedeutet, gegen die Abstände der Punkte, sehr gross ist.

Diese Voraussetzung, welche für alle unsere greifbaren Medien, an welchen wir regelmässige Schwingungen beobachten, zutrifft, hat Cauchy bekanntlich später für den hypothetischen Aether bestritten; aber nicht weil er dafür einen guten Grund aufweisen konnte, sondern weil er glaubte, im anderen Falle könnte auch die Dispersion der Farben in den Körpern nicht erklärt werden. Er rechnete sogar eine Minimalgrenze für die Distanz der Aetherpunkte heraus, und fand dieselbe $\frac{1}{200}$ der Wellenlänge des Lichtes. Nun wissen wir aber durch die kinetische Gastheorie, welche an Wahrscheinlichkeit jene Aetherrechnungen doch etwas übertrifft, dass innerhalb einer Lichtwellenlänge nicht hunderte, sondern tausende von Molekeln herumschwärmen können, und der Licht- und Wärmeäther eine noch viel feinere Gruppirung besitzen muss. Ausserdem misslang auch jene Erklärung der Dispersion vollständig, denn bei der von Cauchy angenommenen Ursache müsste der leere Raum ebensogut die Farben zerstreuen wie die Körper. Das ist aber nicht der Fall. Es ist üblich geblieben, bei Abhandlungen über Optik Cauchy's unmotivirte Ansicht, oder vielmehr seine Formeln beizubehalten, und in den Rechnungen noch ein Glied über das zweite hinaus in Betracht zu nehmen; wahrscheinlich weil man glaubt, die Rechnung dadurch allgemeiner und genauer zu machen. Als analytisches Rechnungsexempel betrachtet, ist das schon richtig, aber der Karakter der Schwingungsbewegung wird eben in den Differenzialformen zweiter Ordnung definirt und wird durch Hinzufügung weiterer Glieder nur gestört.

Ich verweise zuvörderst auf ME. 248,[1]) wo gezeigt wird, dass jede Differenzialordnung einer Funktion eine gewisse karakteristische Eigenschaft derselben ausdrückt, und dass, wenn eine solche der speziellen Betrachtung unterworfen wird, dann die übrigen Glieder der Ausgangsgleichung nicht nur vernachlässigt werden dürfen, sondern absolut nullifizirt werden müssen. Wir haben hier eine Anwendung dieses allgemeinen Prinzips.

---

[1]) ME. bedeutet: Schmitz-Dumont, Mathematische Elemente der Erkenntnisstheorie 1878; die beigefügte Zahl ist die Seitenzahl.

Was wir Ton- und Lichtschwingungen nennen, ist nicht Ausdruck der ganzen Bewegung des Mediums, sondern eines bestimmten Theiles derselben; denn jeder einzelne Sinn ist so konstruirt, dass er nur einen bestimmten Theil derselben auffasst. Betrachten wir z. B. eine schwingende, tönende Saite. Die Molekel derselben bewegen sich nicht genau in der Wellenkurve, sondern ein jedes derselben führt noch mannigfaltige Bewegungen um die mittleren Lagen dieser Kurve aus. Unser Ohr aber fasst nur jene mittleren Lagen auf, unser Gefühl für Wärme und Kälte dagegen jene anderen Molekularbewegungen, resp. die Bewegungsenergie derselben; vielleicht fasst irgend ein anderer Sinn noch einen anderen Theil des ganzen Bewegungsvorganges. Wenn wir deshalb die Tonschwingungen betrachten, so ist es ein Fehler, die mathematische Gleichung der ganzen Bewegungssumme in Rechnung ziehen zu wollen, sondern wir müssen nur denjenigen Theil derselben beachten, welcher den Bedingungen „Nichtdispersion und vollkommene Superposition der Wellen" genügt; alles Andere muss absolut der Null gleich gesetzt werden, weil es eben nicht zum Ton gehört, weil wir keinen Sinn haben, der die genaue geometrische Lagenveränderung der kleinsten Theile aufzufassen vermag. Kommen in Wirklichkeit Bewegungen vor, welche von höheren Potenzen der Verschiebung abhängen, so mögen diese als unqualifizirbare Geräusche oder noch unklassifizirte (physikalische) andere Empfindungen sich vernehmbar machen, aber sie sind nicht Ton. Dasselbe gilt natürlich vom Lichte, und deshalb ist es ein Fehler, bei Betrachtung der Lichtwellen jene höheren Potenzen in Rechnung zu ziehen.

Aber noch eine andere Erscheinung belehrt uns, dass bei den Lichtschwingungen nimmermehr von den höheren Potenzen der Verschiebungen die Rede sein darf, nämlich die Superposition der Wellen. Die Lichtstrahlen, mit ihren tausendfältigen Kreuzungen an jedem Punkte des Raumes sind doch gewiss Schwingungen, denen diese Eigenschaft im höchsten Grade zukommt; wie die analytische Begründung derselben aber zeigt, müssten sie einander stören, wenn die Potenzen und Produkte der Verschiebung über den ersten Grad hinaus von irgend welchem Einflusse wären. Die Tonschwingungen dagegen besitzen diese Superposition nicht voll-

kommen; bei ihnen können wir Kombinationen erzeugen, wo Störung der sich kreuzenden Wellen eintritt, Stösse, Schwebungen etc. sich bemerkbar machen, und schliesslich der musikalische, d. h. der reine Ton aufhört, zu Geräusch degenerirt. In diesen Fällen ist der Mathematiker allerdings berechtigt, jene höheren Glieder der Entwickelung in Rechnung zu bringen. Ich weiss mir nicht zu erklären, warum die Mathematiker, welche in der Optik die Berücksichtigung jener Formelglieder für einen Fortschritt in der Genauigkeit halten, diesen Punkt nie beachtet oder erwähnt haben; vielleicht veranlassen diese Zeilen die Aufmerksamkeit hierhin zu lenken. Es folgt daraus weiter, dass die jetzt übliche Bestimmung der abstossenden Kraft der Aetherpunkte, proportional der sechsten Potenz der Entfernung, noch weniger richtig sein kann, wie Cauchy's anfänglich ausgerechnete vierte Potenz. Sollte es Jemanden belieben, die Rechnung noch weiter fortzusetzen, und noch höhere Glieder der Reihe zu beachten, so wird er wieder eine andere Kraft herausrechnen. Solange bei dergleichen Reihen nicht motivirt wird, warum man bei diesem oder jenem Gliede aufhört, kann ein Zahlenresultat keinen Anspruch auf Glaubwürdigkeit machen. Diese Motivation ist für unsere Hypothese vorhin gegeben worden.

Suchen wir, inwieweit unsere bestimmte Vorstellung über den Aether diese Bedingung einer sehr kleinen Entfernung der Aetherpunkte gegenüber der Wellenlänge erfüllt. Da diese letztere gleich circa $\frac{1}{2000}$ Millimeter, $\varDelta = 1{,}000{,}000\ \delta$, und $\varDelta \angle$ ein Milliontel Millimeter, was bei der Wärme motivirt wird, so erhalten wir: Abstand der Aetherpunkte zur Wellenlänge $\angle$ 1 : 500 Millionen, oder etwa wie ein Centimeter zum Erdhalbmesser. Das dürfte doch wohl genügen, um bei irgend einer Amplitude der Schwingung die Vernachlässigung von ε^2 gegenüber ε zu rechtfertigen. Nach Cauchy ist ein Verhältniss von δ zur Wellenlänge wie 1 : 500 hinreichend, um alle Dispersion der vom Stern Algol kommenden Lichtstrahlen verschwinden zu lassen.

4. Bewegungsaustausch zwischen Aether und Körper.

Dem Kap. IV erwähnten Satze der Hydrodynamik zufolge beeinflusst ein vollkommen flüssiges Medium die Bewegung der Rotationskörper, wenn der Bewegungszustand des Mediums oder des

in ihm schwimmenden Körpers sich verändert. Schwingungen werden demnach vom Aether auf das Atom und umgekehrt übertragen. Dies ist aber erst in unserer Hypothese möglich, in welcher die Elemente von Aether und Körper dieselben sind. Nimmt man, wie gewöhnlich, zwei wesenhaft verschiedene Materien an, oder solche, welchen verschiedene Kräftearten inhäriren — was dasselbe besagt — so ist es ein Alogismus, anzunehmen, dass die Bewegungszustände zwischen diesen Materien ausgetauscht oder übertragen werden können. Weiteres hierüber s. Buch B. I.

5. Brechung des Lichtes.

Um die Brechung in den Körpern zu erklären, machte Fresnel die willkürliche Voraussetzung, dass der Aether in denselben eine grössere Masse, aber keine grössere Elastizität als im freien Raume besitze. Fast alle späteren Physiker adoptirten diese Annahme. Die Frage, wodurch denn jene grössere Ansammlung des Aethers in den Körpern bewirkt würde, blieb unerörtert; ebenso die Frage, ob denn die Masse eines elastischen Körpers vermehrt werden könne, ohne zugleich die Elastizität selber zu ändern. Es sind dies Folgen davon, wenn man physikalische Formeln nur algebraisch betrachtet. Man glaubt dann die voneinander unabhängigen Faktoren beliebig ändern zu können, und übersieht, dass bei einer solchen Aenderung häufig die ganze physikalische Bedeutung dieser Faktoren, und die Bedeutung der Formel zerstört wird. In $v = \sqrt{\frac{e}{d}}$ sind allerdings e und d Grössen verschiedener Bedeutung, wenn sie sich auf Medien verschiedener Natur beziehen, also algebraisch sog. von einander unabhängige Faktoren. Da scheint es allerdings die einfachste oder bequemste Annahme zu sein, den einen dieser Faktoren sich verändern zu lassen, während der andere stabil bleibt, damit v sich verändere. Die Elastizität des Aethers blieb eine Eigenschaft, welcher auf greifbar beobachtendem Wege nicht beizukommen war; man liess sie also so unbestimmt (d. h. in diesem Falle konstant), wie sie im freien Raume aufgefasst werden musste. Dagegen erhob sich nie ein Zweifel, dass die Masse der Körper verschiedenartig sein könne. Der von der Mathematik geforderte Begriff einer Masse des Aethers wurde der

Körpermasse ähnlich gedacht, und es entstand die psychologisch so natürliche Begriffskombination, dass im dichteren Körper auch dichterer Aether, oder wenigstens mehr Masse zu bewegen sei. Diese Ansicht schien sogar unterstützt durch die Thatsache, dass die Körper bei ihrer Verdichtung das Licht langsamer fortpflanzen.

Nun ist aber nach logischen Begriffen die Verdichtung eines elastischen Mediums ohne Erhöhung seiner Elastizität ganz unmöglich. Elastizität ist die Kraft, mit welcher ein Körper gegen Verdünnung oder Verdichtung oder Verschiebung seiner Theile überhaupt reagirt. Je stärker also ein solcher Körper verdichtet wird — um bei dieser speziellen Veränderung seiner Theile zu bleiben — desto grösser muss die Kraft werden, welche seine vorherige Gestalt wiederherzustellen strebt; sonst ist er eben ein nicht elastischer Körper. Wollten wir ein Medium annehmen, dessen Widerstand mit Zunahme der Verdichtung nicht wächst, so müsste dasselbe durch irgend eine Kraft, welche überhaupt eine Verdichtung hervorzubringen fähig ist, auf ein unendlich kleines Volum zusammengedrückt werden können. Aus diesen Widersprüchen, welche der Fresnelschen Annahme entspringen, leuchtet also hinreichend ein, wie verkehrt es ist, E und D in der Geschwindigkeitsformel als unabhängig von einander anzusehen; dass im Gegentheil bei einem und demselben Medium für verschiedene Stadien seiner Dichte diese beiden Faktoren ganz bestimmte Funktionen voneinander sein müssen, und dass diese Functionen auch nach mechanischen Prinzipien festzustellen sind.

Aus der Formel $v = \sqrt{\frac{e}{d}}$ ersehen wir, dass die Geschwindigkeit in demselben Medium bei zunehmender Dichte konstant bleibt, wenn die Elastizität in demselben Maasse wie die Dichte wächst; dass sie geringer wird, wenn e langsamer als d sich vergrössert. In diesem Falle müsste aber auch die Kraft, mit welcher die Theilchen aufeinander wirken, in einem geringeren Verhältniss zunehmen als umgekehrt zur Grösse der Verschiebung. Ein solches Medium wäre aber flüssig, seine Theilchen hätten keine stabilen Gleichgewichtslagen ihren Nachbarn gegenüber; transversale, d. h. Lichtschwingungen wären also in ihm nicht möglich. Die Hypothese eines dichteren Aethers in den Körpern ist aus diesem

Grunde schon untauglich zu einer Erklärung der langsameren Lichtgeschwindigkeit in den Körpern, und wir brauchen nicht weiter die zu neuen Widersprüchen führende Frage zu erörtern, wie denn der dichtere Aether in den Körpern von dem Ausströmen zurückgehalten werde, — Fragen, welche durch Wörter wie Dynamidensystem, Sättigung eines Körperatoms durch ein mehr oder minder grosses Quantum Aether etc., nicht gelöst werden.

Neuere Physiker suchen die Erklärung in einer direkten Einwirkung der Körpermolekel auf den Aether. Diese in Bezug auf gegenseitige Beeinflussung schwingender Medien und fester Körpersysteme werthvollen Untersuchungen (von Sellmeyer, Ketteler, Briot) finden, dass die Brechung eine solche ist, als wenn von der lebendigen Kraft der Lichtschwingung im Körper ein der ponderabelen Masse des Körpers entsprechender (proportionaler) Theil absorbirt würde; woraus sie folgern, dass der Aether im Körper gleich demjenigen des freien Raumes, dass aber die schwingende Masse im Körper um ponderabele, aber nicht um elastische Masse vermehrt werde. Dies ist die Forderung zweier heterogener Stoffe, von denen der eine Trägheit und Elastizität, der andere nur Trägheit besitzen soll; eine Forderung, welche nach Analogie unserer Materialien von verschiedenem Grade der Elastizität annehmbar scheint, die aber in letzter Instanz nichts leistet, weil sie uns die Erklärung schuldig bleibt, wie denn überhaupt solche heterogene Stoffe in ihren kleinsten Theilen gebildet sind, und wie sie überhaupt aufeinander wirken können. Aus den Abstraktionen Trägheit, Elastizität, Ponderabilität werden willkürlich Kombinationen gebildet, wie sie gerade zweckmässig erscheinen, ohne zu erörtern, ob ein nur träger Stoff denn möglich, wenn er auf einen elastischen doch reagiren soll. Im Grunde ist diese Hypothese von der Fresnelschen nicht verschieden. Die Rolle, welche dieser dem Aether zumuthete, die Vergrösserung der schwingenden Masse im Körper ohne entsprechende Vergrösserung der Elastizität, wird hier den Körpermolekeln zugeschoben. In beiden Fällen ist die Forderung: absolute Unabhängigkeit von Dichte und Elastizität.

Ziehen wir diesen Versuchen gegenüber die Folgerungen unserer Hypothese, so ist die Frage über die Natur der heterogenen Materien „Aether und ponderabeler Stoff", sowie über die Möglich-

keit von deren Wechselwirkung von vornherein erledigt. Sodann sind für deren Wechselwirkung bei Schwingungen keine neuen Hypothesen, sondern die alleinige Anwendung mechanischer Prinzipien nothwendig. Hieraus wird sich zeigen, dass allerdings die Anwesenheit der Körperatome die Geschwindigkeit der Schwingungen verzögert; aber nicht, weil die bewegte Masse dadurch vermehrt wird — denn es findet das Gegentheil statt —, sondern weil Dichte, Elastizität und Struktur der aus Aether und Atomen kombinirten brechenden Systeme in bestimmter Abhängigkeit voneinander stehen.

Bildet der Körper als Ganzes ein ätherdünneres Medium als der freie Raum, so muss den Formeln

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}}, \quad e = d^2, \quad v = \sqrt{d}$$

zufolge die Fortpflanzung der Schwingungen in ersterem langsamer erfolgen als die Lichtgeschwindigkeit L in letzterem. Diese Formeln beziehen sich aber auf in den kleinsten Theilen homogene Systeme, und müssen die Körper, weil sie dies nicht sind, einer besonderen Betrachtung unterzogen werden.

Nach der gegebenen Konstruktion besteht das Volum eines Körpers zum grössten Theile aus Aether von der Dichte des freien im leeren Raume; zum kleineren Theil aus Rotationsfiguren verdünnten Aethers, welche bei festen und flüssigen Körpern in Distanzen $\angle \Delta$ voneinander Gleichgewichtslagen haben. Die Masse des ganzen Körpers ist unabhängig von den Stellen, an welchen die Kraftpunkte mehr oder weniger konzentrirt sind: die Elastizität des ganzen Systems ist aber, ebenso wie die Potenzialenergie desselben, abhängig von der Lage dieser Elemente, und ist eine andere für jeden bestimmten Fall; muss also berechnet werden aus der konstanten Elastizität des freien Aethers und der Struktur des speziellen Körpermolekels. In den erwähnten früheren Rechnungen wurde diese Elastizitätsfrage nicht berücksichtigt, da wegen Mangel einer bestimmten Vorstellung über die beiden mysteriösen Materien ein jeder Anhalts- und Ausgangspunkt dazu fehlte. Nur die Masse war dort etwas bestimmt Definirtes, und deshalb wurde der Masse die ganze Verantwortlichkeit für die Brechung in den Rechnungen aufzubürden gesucht.

Versuchen wir nun die Elastizität eines bestimmten Atoms im Verhältniss zu derjenigen des Aethers zu berechnen, so ist zu beachten, dass die Drehungsenergie des Atoms gar keinen Einfluss auf diese Elastizität hat, sondern dass diese letztere nur bestimmt wird durch die Lage der Kraftpunkte im Atom. Denn die Zentrifugalkraft wächst nicht, wenn das Atom an einer Stelle abgeplattet, seine Elemente mehr oder weniger aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben werden; sie nimmt ab näher dem Zentrum, nimmt zu weiter davon. Da bei der Schwingung das Atom beide Deformationen ausführt, so gleichen dieselben sich aus und haben keinen Einfluss auf die Elastizität, die Widerstandskraft gegen Deformationen. Wir haben also nur nach dem Gesetze $\varphi = - r^{-2}$ den Widerstand zu berechnen, welchen bei einer bestimmten Anordnung der Kraftpunkte eines Atoms die Summe derselben der Verschiebung eines Oberflächenpunktes entgegensetzen; besonders aber die Vergrösserung dieses Widerstandes bei vergrösserter Verschiebung; denn diese V e r ä n d e r u n g der widerstehenden Kraft ist es eigentlich, was die Eigenschaft der Elastizität ausmacht. Die solcherweise gefundene Elastizität der Atome ist dann mit derjenigen des Aethers im Körper zu einer Summe zu vereinigen. Wie leicht ersichtlich, wird dieselbe ganz bedeutend geringer ausfallen, als die eines homogenen Aethers von einer mittleren Dichte, gleich derjenigen des Atoms, und wird in gar keinem Verhältniss zur Masse des Atoms stehen. Die Rechnung würde aber, wenn überhaupt allgemein ausführbar, zu höchst komplizirten Summenformen führen, welche schwerlich eine Uebersichtlichkeit gestatten. Ein einfacherer Weg, der ein ebenso genaues Resultat liefert, ist, die Elastizität einer Linie des Körpersystems zu berechnen, und daraus auf die Eigenschaften des Ganzen zu schliessen. Hierbei werden Aether und Atome eines Körpervolums als ein System gedacht, welches ohne Verlust lebendiger Kraft schwingt. Da wir Körper haben, welche ohne nennenswerthe Absorption den Durchgang des Lichtes gestatten, so ist die physikalische Anwendung eines solchen Systems gestattet. Um die Resultate konkreter und die Rechnung einfacher zu gestalten, betrachten wir auch hier, wie in Kap. II, einen bestimmten Fall, der als Grenzfall möglicher Konstruktionen aufgefasst wird, und woraus demnach die realen Verhältnisse sich leicht ableiten lassen.

Sei eine Ebene in gleich grosse Quadrate abgetheilt, auf alle mögliche Weise gegeneinander verschoben (s. Fig. 5.) In jedem Quadrat ein Kreis gezogen mit Durchmesser gleich der Quadratseite. Denken wir uns jetzt die Kreise leer, die Quadratecken mit Kraftpunkten von der Dichte des freien Aethers angefüllt, so stellt die Ebene den Querschnitt eines Raumes dar, welcher die grösstmögliche Anzahl Atome von kleinstmöglicher Dichte, mit gleicher Dichte und Elastizität in jeder Richtung enthält; also einen Körper mit grösstmöglicher Verschiedenheit von dem freien Aether in Bezug auf Fortpflanzung der Schwingungen. Eine gerade Linie *(zz)* durch die Ebene gezogen, wird demnach, als ein Zug und Druck ausgesetzter Stab betrachtet, ein Maass für die Masse und Elastizität des Körpers sein. Wie vorhin ausgeführt, wird die Elastizität dieses Stabes nur durch die Lage der Kraftpunkte auf ihm bestimmt, nicht durch die Bewegung, welche sie etwa haben. Dieser Strahl wird, weil er bei hinreichender Länge die Atome an allen Stellen durchschneidet, zusammengesetzt sein aus den Einzellinien $\alpha_n \beta_n$ Fig. 6, welche sich in gleichen Abständen in dem Quadrate ziehen lassen. Diese Einzellinien bestehen ihrerseits aus den Theilen $\alpha_n \omega_n$, $\omega_n \beta_n$, welche die Dichte und Elastizität des freien Aethers besitzen, und den Linien $\omega_n \omega_n$, deren Dichte $= \frac{2\delta}{R}$ und deren Elastizität im umgekehrten Quadrat ihrer Länge steht, also durch $\left(\frac{\delta}{\omega_n \omega_n}\right)^2$ gemessen wird. Führt man diese Rechnung für Atomquerschnitte von $R \geqq 500\,\delta$ aus, so erhält man für die Elastizität eines solchen Strahles in runder Zahl $\frac{1}{200000}$ von derjenigen des freien Aethers. Struktur und Elastizität eines solchen Körpers würde sich etwa verhalten zu derjenigen des freien Aethers wie diejenige des Wasserschaumes zu der des Wassers. Die Masse eines einzelnen Quadrates ist $= \frac{4-\pi}{4}$, die mittlere lineare Dichte des Strahles also $\sqrt{\frac{4-\pi}{4}}$. Hieraus ergiebt sich die Fortpflanzung der Wellenbewegung in einem solchen Strahle gleich $\frac{1}{360}$ der Geschwindigkeit (L) im freien Aether. Mit dieser Grenzzahl, einer möglichen Minimalgeschwindigkeit, ist ein hinreichender Spielraum

gegeben, um alle realen Brechungsverhältnisse zu erklären. Dass dieses Minimum bei realen Körpern nie erreicht wird, ist schon ersichtlich aus den früheren Betrachtungen, wonach die Struktur der Körper eine andere als die vorhin angenommene ist; denn die Einzelatome oder wenigstens die Körpermolekel berühren einander nicht, sondern stehen ziemlich weit auseinander. Auch mögen die Atome eine grössere Dichte, als die vorhin angenommene haben, d. h. aus vielen Schalen von Kraftpunkten bestehen, in welchem Falle ihre Elastizität grösser wird. Wäre ein System zu konstruiren vom Brechungsvermögen des Glases, also mit $v = \frac{1}{3}$ L, so könnte in einem solchen die Entfernung der Atome je nach ihrer Grösse und Dichte variiren von δ bis nahe Δ. Wäre Gestalt und Struktur der Molekel eines durchsichtigen Körpers bekannt, so liesse sich der gegenseitige Abstand der Molekel berechnen. Die Chemie könnte also mit der Zeit die hierzu nothwendigen Konstanten liefern. Andererseits scheint es, dass die kinetische Wärmetheorie einmal Aufklärung über die Entfernung der Molekel geben kann; dann wären aus solchen Resultaten in Verbindung mit den Brechungs- und Dispersionskonstanten Schlüsse auf die Struktur der Molekel möglich.

Doppelte und einfache Brechung.

Wenn die Atome Kugeln wären, so müssten in jedem kristallinisch gebauten Körper aus geometrischen Gründen die lineare Dichte und die Elastizität in verschiedenen Richtungen verschieden sein. Die Elastizitätsformeln ergeben, dass diese verschiedenen Richtungen sich auf drei Hauptaxen und zwei transversale Schwingungssysteme reduziren lassen. In solchen Körpern muss also doppelte Brechung eintreten. Da die Atome aber keine Kugeln sind, so ist eine Kompensation zwischen den Faktoren d und e möglich, und damit einfache Brechung. Gleicherweise ist klar, dass Veränderungen in den molekularen Abständen eines einfach brechenden Mittels, mögen dieselben durch mechanischen Druck, Wärme oder wie immer sonst hervorgerufen werden, dasselbe in ein doppelt brechendes verwandeln können. Wird andrerseits ein doppelt brechendes Mittel aus der regelmässigen in eine unregelmässige Anordnung gebracht, etwa durch Schmelzung, so-

dass die Achsen der aneinanderstossenden Kristalle nicht mehr dieselbe Richtung haben, so muss es bei hinreichender Ausdehnung, resp. zureichender Mischung der Achsenrichtungen, zu einem einfach brechenden werden. Es tritt hierbei ein ähnlicher Fall ein wie bei dem freien Aether, welcher nur in sehr kleinen Räumen einheitlich kristallinisch geordnet sein kann.

Dass eine allseitig gleiche Verdichtung eines Körpers eine Erhöhung des Brechungsvermögens proportional dieser Verdichtung bewirken muss, versteht sich von selbst aus den geometrisch ähnlich veränderten Bedingungen.

6. Dispersion.

Damit in einem Mittel kurze und lange Wellen gleich rasch sich fortpflanzen, ist nach Cauchy's Formeln, sowie auch nach unserer Ableitung, die Bedingung $v = \sqrt{d}$ nothwendig. Eben weil diese Bedingung in unserem freien Aether erfüllt ist, kann sie in dem dishomogenen Medium der Körpervolumen nicht mehr vorhanden sein. Es muss also eine Zerstreuung der Farben stattfinden. Zu erklären bleibt jetzt die Thatsache, dass die kürzeren Wellen in allen Körpern stärker gebrochen werden wie die längeren. Cauchy fand aus seinen allgemeinen Gleichungen, worin er Glieder höherer Differenzialordnung als der zweiten berücksichtigte, dass der grösseren Welle die grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit entsprechen müsse. Seine Entwicklung bewies deshalb nur, dass in Systemen, wo die Abstände der Elemente gegenüber der Wellenlänge nicht sehr klein sind, dieses Verhältniss zwischen Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit eintritt. Da uns nun die Beobachtung zeigt, dass der freie Aether keine Farbenzerstreuung hat, dass der freie Aether also kein solches System ist, Cauchy ebensowenig einen Grund anzugeben vermochte, warum die Körper ein solches System bildeten, so hat er auch nicht das Dispersionsgesetz für Körper bewiesen; denn ein der Beobachtung entsprechendes Resultat aus einer falschen Voraussetzung gewinnen, ist keine Erklärung des thatsächlichen Vorgangs. Unserer Konstruktion zufolge muss die Dispersion aus der Bewegung eines innerhalb der Wellenlänge nicht homogenen Systems zu erklären sein. Ich

lasse dahingestellt, ob das Dispersionsgesetz allgemein für alle Medien gilt, welche nicht der Form $e = d^2$ genügen, und ob es sich etwa schon aus der Formel der Elastizitätsgleichungen $v = \frac{sl}{2\pi}$, worin l die Wellenlänge, s den reziproken Werth einer Achse des Polarisationselipsoids bedeutet, ableiten lässt. Denn, wie sich bei der Elektrizität zeigen wird, harmonirt der hier konstruirte Aether wohl mit den meisten, aber nicht mit allen Annahmen, welche bei Ableitung der Elastizitätsgleichungen gemacht werden. Es scheint mir zulässig, einen Mechanismus der hier angenommenen Körperkonstruktion nachzubilden und auf diese Weise jene Struktur als Ursache der Dispersion experimentell zu bestätigen.

Nehmen wir einen Stab (Fig. 6) und ertheilen demselben an dem einen Ende a eine hin und her gehende Bewegung, so wird das andere Ende b dieselbe periodische Bewegung ausführen, einerlei welche Geschwindigkeit die Periode bei a hat; vorausgesetzt natürlich, dass die Bewegung nicht eine solche ist, welche den molekularen Zusammenhang des Stabes ändert. Die Periode wird aber bei b etwas später beginnen als bei a; um eine Zeitdifferenz, welche durch die Geschwindigkeit des Schalles in dem Stabe gemessen wird. Besteht derselbe aus Stahl und ist eine Meile lang, so wird b sich eine Sekunde später zu bewegen anfangen als a. Diese Bewegung ist ein Bild des Lichtstrahles in einem Medium ohne Brechung und Farbenzerstreuung. Fügen wir jetzt in den Stab Ringe aus demselben Materiale wie dasjenige des Stabes ein, so giebt uns dieses System gleicherweise das Bild unserer Körperkonstruktion, in welchem die Stabtheile den Aether, die Ringe die Atome vertreten. Geben wir jetzt dem Stabe bei a wiederum die obige Bewegung mit der Periode T_a bei a, so wird dieselbe sich wegen des jetzt weniger elastischen Mediums langsamer nach b fortpflanzen und die Periode T_b bei b wird langsamer sein als bei a. Wir erhalten also

$$\frac{T_a}{T_b} < 1 = \frac{1}{n},$$

dies ist das Bild der Brechung.

Geben wir jetzt der Kurbel $c\,o$, welche dem Stabe die hin- und hergehende Bewegung ertheilt, verschiedene Längen, und

reguliren die Periode so, dass die mittlere Geschwindigkeit von a dieselbe bleibt, so wird $\frac{1}{n}$ für jede Länge der Kurbel einen anderen Werth haben, und zwar desto kleiner sein, je kürzer $c\,o$. Hiermit stimmt das Dispersionsgesetz der Körper. Dieser Versuch muss, wie leicht ersichtlich, mit solchen Geschwindigkeiten operiren, welche nicht so rasch sind, dass der Zusammenhang der Materialien geändert wird, aber auch so rasch, dass die verschiedene Elastizität von Stab und Ring zur Geltung kommen kann.

Aus den gegebenen Konstruktionen folgt auch, dass die Dispersion ebenso wie das Brechungsvermögen mit der Verdichtung der Körper direkt proportional zunimmt, so lange die Struktur des Körpers bei dieser Verdichtung sich geometrisch ähnlich bleibt. Wird der Körper in eine andere Struktur, einen anderen Aggregatzustand, gebracht, so lässt sich natürlich im Allgemeinen nichts weiter über den Gang der Lichtstrahlen voraussagen.

7. Vergleichung der Schall- und Lichtgeschwindigkeit.

Eine Andeutung der möglichen Strukturverhältnisse der Körper mag aus folgender Rechnung entnommen werden.

Wie vorhin ausgeführt, haben auch die dichtesten Körper ihrem ganzen Volum nach nur eine geringe Aetherverdünnung; d. h. ihre Molekel stehen weiter auseinander als die Durchmesser dieser Molekel. Nehmen wir an, beim Stahle sei dies Verhältniss wie 10 : 1 und das Molekel resp. Atom bestehe aus einer einzigen Schicht von Kraftpunkten. Die lineare Dichte des Stahles wäre dann $\frac{2}{10}$ von derjenigen des Aethers. Da beim Schalle die ponderabele Masse des Körpers sich bewegt, so wäre die vom Licht bewegte Masse im freien Aether zehnfach grösser als die durch den Schall im Stahle bewegte. Die grössere Geschwindigkeit des Lichtes ist demnach nicht, wie gewöhnlich geschieht, aus der geringeren Masse des Aethers, sondern aus seiner grösseren Elastizität den Körpern gegenüber zu erklären.

Die Lichtgeschwindigkeit V_e verhält sich zu der des Schalles im Stahle V_s wie 50000 : 1. Wir erhalten somit

aus der Formel $V = \sqrt{\frac{E}{D}}$

die linearen Dichten $D_e : D_s = 10 : 1$

die Elastizitäten $E_e : E_s = 25 \cdot 10^8 : 1$.

Das ist zwar eine grosse Zahl für E_e, aber nicht unwahrscheinlicher als die grossen Zahlen der Astronomie, womit die Bewegungen der Himmelskörper erklärt werden; Bewegungen, deren Grösse die naive Anschauung gar nicht für so verschieden hält von unseren irdischen Ausdehnungen und Geschwindigkeiten. Die Vorstellung sträubt sich nur gegen Annahme einer so grossen Kohäsion des Aethers, weil sie sich nicht von den speziellen Verhältnissen der Kohäsion unserer festen Körper losmachen kann. Ist diese Anschauung einmal überwunden und begriffen, dass Systeme ihrer Struktur zufolge diese speziellen Kohäsionserscheinungen der festen Körper nur für unmessbar kleine Distanzen aufweisen können, so wird man ebensowenig wie in der Astronomie noch ein Bedenken hegen gegen beliebige Vergrösserung der Zahlen, sofern dies durch richtige Schlüsse gefordert ist. Jene Zahl 25 tausend Millionen stimmt zudem gar nicht schlecht mit den gemachten Rechnungen.

Habe das Stahlatom 1000 δ Durchmesser, so beträgt die Kohäsion zweier solcher Ringatome (Fig. 7), welche mit ihren Ringflächen einander möglichst nahe, also in der Entfernung δ ihrer nächsten Punkte, liegen, $\frac{7}{100}$ von dem Aetherdruck der Ringfläche $\frac{\pi}{2}(R+r)$ (1000 δ). Stehen die Ringe dagegen senkrecht aufeinander, so ist ihre Kohäsion annäherungsweise $(\frac{7}{100})^2 = \frac{1}{200}$. Nimmt die Kohäsion ab, wie das umgekehrte Quadrat der Entfernung nächster Flächen, so würde das Verhältniss der Elastizitäten $E_e : E_s$ in ersterem Falle bei einem gegenseitigen Abstande der Stahlatome von 40, im zweiten Falle von 10 ihrer Durchmesser eintreten, also bei der vorhin angenommenen linearen Dichte des Stahles. Aether und Stahl wären hierbei in ihren Kohäsionsverhältnissen etwa vergleichbar dem Wasser gegenüber einem Haufen hohler Glaskugeeln, welche im Wasser schwimmen und durch die Adhäsion in einer bestimmten Körpergestalt zusammenhalten werden. Wäre

diese Dichtigkeitsbestimmung des Stahles richtig, so würden die mittleren Atomabstände unserer kohärirenden Körper von Schwefeläther bis zu Platin in den Grenzen 8 bis 30 fach des Atomdurchmessers stehen.

VIII.

Wärme.

Als sicher festgestellte Sätze der Physik gelten:

1) dass die Wärme eine Bewegung der Körpermolekel (kinetische Energie) und
2) dass die Gase aus Theilchen bestehen, welche gegeneinander eine fortschreitende Bewegung haben.

Alle anderen Sätze der Wärmetheorie, sowie die heute allgemein adoptirten Vorstellungen über die Aggregatzustände der Materie beruhen auf diesen beiden Sätzen. Sie selbst haben aber wiederum gewisse Voraussetzungen, deren Begründung oder Untersuchung überhaupt meist übergangen wird, weil die Physiker über die metaphysischen Begriffe, die dabei nicht umgangen werden können, getheilter Meinung sind. Diese unausgesprochenen Voraussetzungen bestehen darin, dass a) die Molekel und Atome absolut elastische Körper und b) dass Aether und ponderabele Körper nach dem Begriffe der Masse miteinander verglichen werden können.

Zu a). Sind die Atome nicht absolut elastisch, so ist die kinetische Gastheorie unmöglich. Wie gross auch die anfängliche Energie der als absolut und unveränderlich gedachten Atome, sie müsste nach einer gewissen Zeit ein Ende erreicht haben, und alle Materie zu einem ruhenden Haufen zusammengeschleudert sein; besonders wenn man den ponderabelen Atomen noch eine Anziehungskraft zuschreibt. Ist das Atom aber elastisch, so ist es veränderlich, besteht aus Theilen, die aufeinander abstossend und anziehend reagiren müssen — Eigenschaften, welche dem üblichen Atombegriffe als einem untheilbaren unveränderlichen

Elemente widersprechen. Unsere Hypothese giebt nun dieser Gastheorie das nothwendige Material, um das Atom mit seinen geforderten Eigenschaften auszustatten. Alle diese Eigenschaften werden aus rein mechanischen Prinzipien abgeleitet, sind also logisch eindeutig erklärt bis auf das Element, den Kraftpunkt, welcher vorab Hypothese bleibt. Im zweiten Abschnitt dieser Arbeit wird er seine mechanische und logische Erklärung finden.

Die Gastheorie führt aus, dass die Atome in grösseren Entfernungen mit der Energie der ponderabelen Körper überhaupt aufeinander wirken; dass aber beginnend mit einer gewissen kleinen Entfernung, Wirkungssphäre des Atoms genannt, diese Wechselwirkung eine wesentlich andere wird, die man deshalb neuen (Molekular-)Kräften zuschreibt, welche nur bis in diese Entfernung hin wirken sollen. Um eine solche Wirkungsart in kontinuirlich fortschreitenden mathematischen Formeln ausdrücken zu können, nimmt man an, dass diese Molekularkräfte nach einer höheren Potenz der Entfernung als der zweiten wirken. Unsere Hypothese zeigte, dass diese neuen Kräfte ganz unnöthig seien; dass dagegen die Summe der Wirkungen aller Kraftpunkte von einer Distanz $< \Delta$ zu einer starren Fläche einen anderen Ausdruck erhält als in grösseren Entfernungen. Diese Distanz begrenzt die Sphäre der Kohäsionswirkungen, und ist nur insofern verschieden von der Wirkungssphäre des Atoms (in dem Sinne von Clausius und Maxwell) als der Radius dieser letzteren von dem Mittelpunkt des Molekels bis zur Grenze dieser Sphäre, erstere (Δ) dagegen von der Oberfläche des Atoms (resp. der mittleren geometrischen Umhüllungsfläche des Molekels) bis zur Grenze der Kohäsionswirkung zu rechnen ist. Δ ist also kleiner als der mittlere Radius jener Wirkungssphäre. Unsere Hypothese lässt gleicherweise erkennen, wie je nach dem verschiedenen Bewegungszustand der Einzelatome, und je nach Gestalt und Kombination derselben zu Molekeln diese letzteren von ihren Wirkungssphären zurückgeworfen, in ihrer chemischen Konstitution, d. h. geometrischen Struktur, unverändert bleiben, oder auch, diese Wirkungssphären durchbrechend, neue Aequipotenzialflächen der Kohäsion bildend, zu chemischer Verbindung und Trennung der Elementaratome Veranlassung geben können.

Zu b). Soll die Wärme kinetische Energie sein, und für die strahlende Wärme nicht die weitere Hypothese einer neuen Kraft erforderlich sein, so muss ponderabele und Aethermasse gleichartig, und nur der Zahl nach für dasselbe Volum verschieden angenommen werden dürfen. Man glaubt nun der Masse sowohl anziehende wie abstossende Kräfte beilegen zu können. Das ist zulässig, wenn unter „Masse" ein fester Körper verstanden wird; aber nicht, wenn die Eigenschaften der Körperelemente bestimmt werden. Aus den Formeln der Lichtbewegung, welche alle von Cauchy's fundamentalen Gleichungen ausgehen, werden die Konstanten der wirkenden Kräfte dahin bestimmt, dass die Aetherpunkte aufeinander abstossend, auf die Körperelemente aber anziehend wirken. Das ist unmöglich. In diesem Falle müssten die Körperelemente sich mit einer Kruste Aether bedecken, bis die Summe der Wirkungen dieses ganzen Systems gar keine Wirkung mehr auf den freien Aether hätte. Dann könnte gar nicht mehr von einer Mittheilung der Aetherschwingung auf das Körperäthersystem, und vice versa, die Rede sein. Dieses System wäre $+m - m = 0$, d. h. von der Masse Null der kinetischen Energie des Aethers gegenüber. Mittheilung einer Bewegung ist nur möglich bei Körpern von gleichartiger Materie von verschiedener oder auch gleicher Grösse, d. h. Masse. Soll die Wirkungsart der Materie aus Kräften derselben erklärt werden, so müssen demnach diese Kräfte für jedes Element der Materie die gleichen sein. Obiger Widerspruch, welcher im Folgenden noch weiter aufgedeckt wird, existirt in unserer Hypothese gar nicht, weil dort nur eine einzige Kraft zu allen Verschiedenheiten der Bewegung, zu allen Eigenschaften verschiedener Struktur gebraucht wird.

Strahlende und leitende Wärme.

Trifft die Aetherschwingung einen Körper, dessen Atome eine solche Struktur haben, dass sie von der empfangenen Bewegung nichts zurückbehalten, so ist derselbe durchsichtig und diatherman. Ist seine Struktur aber eine solche, dass die ersten Schichten seiner Atome den grössten Theil derselben aufnehmen, wir ihn also undurchsichtig nennen, so kann umgekehrt auch der hinter den ersten Atomschichten und zwischen diesen lagernde Aether nicht mehr

die regelmässigen Schwingungen des ersten Strahles (hier also der strahlenden Wärme) empfangen und fortpflanzen, sondern die Molekelschwingungen dieser Atome werden solche sein, welche den inneren Aether des Körpers allerdings in Bewegung setzen, aber in interferirende, welche sich bei einer gewissen Dicke des Körpers vollständig aufheben. Schwingt dagegen ein solches Molekelsystem in freiem Aether, was an seiner Oberfläche stattfindet, so wird er diesen in regelmässige Schwingungen versetzen, also Wärme als strahlende Wärme aussenden. Die Fortpflanzung der Wärme im Inneren eines undurchsichtigen Körpers wird nicht durch die Elastizität des freien Aethers, sondern durch die Kohäsionsverhältnisse dieser Körpermolekel bestimmt, würde also höchstens mit der Geschwindigkeit des Schalles erfolgen können. Dass sie aber noch ausserordentlich viel langsamer als diese letztere sein muss, ergiebt sich aus Folgendem. Die Wärmeschwingungen der Atome können periodische sein, welche aber nicht ausschliesslich durch ihren Massenpunkt (Schwerpunkt) bestimmt werden, sondern hauptsächlich durch die Aequipotenzialflächen, welche die umgebenden Atome den Kohäsionsverhältnissen entsprechend bilden. Ihre Gleichgewichtlage kann also ebensogut ein Punkt wie eine Linie oder Fläche sein, geschlossene oder offene, die sich stets neu bilden wie das jedenfalls bei Flüssigkeiten stattfinden wird. Die Amplituden ihrer Perioden werden aber immer sehr klein sein gegenüber den Amplituden der Schallschwingungen. Wenn deshalb eine Saite in tönende Schwingung versetzt wird, so ist es der hierzu nothwendigen Kraft (dem Seitwärtszerren der Saite) gegenüber sehr gleichgültig, ob die verschiedenen Molekel der Saite sich in der seitlichen Verschiebung derselben entsprechender oder entgegengesetzter Bewegung ihrer Molekularschwingung befindet. Soll aber das Molekel, welches durch strahlende Wärme eine grössere Bewegung erhalten hat, diese durch seine Kohäsion auf das nächste übertragen, so wird es bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung anfangs mit demselben interferiren, seine Bewegung auslöschen müssen, und dann erst seinen Ueberschuss auf dasselbe übertragen können. Im Mittel müssen nun in jedem (nicht magnetisch beeinflussten) Körper nach allen Richtungen gleich viele Molekularschwingungen stattfinden, die leitende Wärme sich also erst nach

zahllosen Interferenzen fortpflanzen können, was natürlich viel Zeit erfordert. Es tritt also hier eine ähnliche Verzögerung in der Fortbewegung ein wie bei den Gasen, welche trotz grosser fortschreitender Geschwindigkeit ihrer Molekel wegen der beständigen Richtungsänderung ihrer Bahn nur langsam diffundiren.

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass ein durchsichtiges Molekel, welches also mit dem Aether in nahezu gleicher Periode schwingen kann, die Bewegung des Aethers augenblicklich annimmt. Ein undurchsichtiges Molekel dagegen, welches infolge dieser undurchsichtigen Struktur die Bewegungsenergie des Aethers in eine ganz andere Bewegungsform umwandelt, kann dies nicht augenblicklich ausführen, sondern braucht eine gewisse Zeit hierzu, und bedarf der gleichen Zeit, um seine Bewegung wieder auf die nächste Aetherstrecke zu übertragen, resp. seine Bewegungsenergie in strahlende Wärme zu verwandeln. Haben wir eine Reihe von Billardkugeln, die einander berühren, so pflanzt sich ein Stoss sehr rasch fort. Ist die Reihe aber unterbrochen, und wird die Bewegung zwischen diesen Unterbrechungen nur durch pendelförmig schwingende Kugeln übertragen — denn ähnlich ist ja die Absorption des Lichtstrahles durch undurchsichtige Molekel zu denken —, so gebraucht die Fortpflanzung der Bewegung viel Zeit. Weiteres hierüber folgt unter Elektrizität, bei Erklärung der Korrespondenz des Leitungsvermögens für Elektrizität und Wärme.

IX.

Elektrizität.

Zur Erklärung dieser Kraft wird gewöhnlich die Existenz zweier Flüssigkeiten angenommen, deren gleichartige Elemente sich abstossen, deren ungleichartige sich anziehen. Es giebt heutzutage wohl kaum noch einen Physiker, welcher an die Existenz dieser mysteriösen Flüssigkeiten glaubt, deren Definition ein ganzes Nest von metaphysischen Dunkelheiten und logischen Widersprüchen

enthält; sondern man betrachtet sie als eine bequeme Manier, um in den mathematischen Formeln, welche das ganze Gebiet elektrischer Erscheinungen mechanisch zusammenfassen, die unerklärten Koeffizienten $+ m$ und $- m$, einigermaassen anschaulich zu machen.

Eine hiervon verschiedene Theorie hat Faraday gegeben, indem er die elektrischen Erscheinungen aus den Wirkungen eines den ganzen körperfreien Raum erfüllenden Mediums zu erklären versuchte. In seinen hier folgenden Worten ist das Wesentliche dieser Theorie ausgedrückt:

> „Die direkte induktive Kraft, welche man sich vorstellen kann als wirkend in Linien zwischen den zwei begrenzenden geladenen Oberflächen der Leiter, ist begleitet von einer seitlichen (transversalen) Kraft, welche äquivalent ist einer Ausdehnung oder Zurückstossung zwischen diesen Linien; oder — die anziehende Kraft, welche die Theile des dielektrischen Mediums in Richtung der Induktion aufeinander ausüben, ist begleitet von einer zurückstossenden Kraft in der transversalen Richtung. Induktion scheint in einem gewissen polarisirten Zustande der Theilchen des Mediums zu bestehen, in welchem dieselben durch die elektrisirten Körper versetzt werden, und wodurch diese Theilchen positive und negative Punkte annehmen, welche symmetrisch zueinander und den induzirenden Flächen geordnet sind. Dieser Zustand muss ein gezwungener sein, denn er wird nur durch eine Kraft erzeugt und erhalten, und sinkt sofort zu dem normalen ruhenden Zustande zurück, wenn jene Kraft weggeschafft wird.“

Statt zweier Flüssigkeiten **in** den Körpern gebraucht also Faraday eine Substanz, genannt dielektrisches Medium, **zwischen** den Körpern.

Diese geniale Theorie hat bisher keinen grossen Anklang gefunden.[1]) Als Grund für diesen Misserfolg scheint mir angeführt

[1]) Die angebliche Widerlegung derselben durch Reis (s. Wüllner's Lehrbuch der Physik) beruht auf einem Missverstehen ihrer wesentlichen Sätze. Diesen Physikern war wohl Maxwell's mathematische Zusammenfassung dieser Theorie noch unbekannt.

werden zu dürfen, dass es so schwer ist, sich von der naiven Anschauung loszumachen, welche für eine direkt fernewirkende Kraft der positiven und negativen Elektrizität zu sprechen scheint. Ein zweiter Grund ist der, dass Faraday seine Theorie und ihre Konsequenzen nicht in die mathematische Formelsprache zusammengefasst hat, ohne welche ein festes Urtheil über den Werth derselben nicht möglich ist.

Diese letztere Forderung hat aber C. Maxwell in seinem Buche „Treatise on Electricity and Magnetisme, Oxford 1874" vollständig gelöst. Er zeigt dort, dass die auf Grund von Faraday's Theorie aufgestellten Formeln inhaltlich dasselbe aussagen, wie die Formeln der gewöhnlichen Anschauung, welche den Körpern zwei verschiedene Arten fernewirkender Kräfte zuschreibt. Er zeigte somit, dass allen vorliegenden Beobachtungen gegenüber beide Theorien gleichberechtigt nebeneinander stehen; dass ihnen beiden aber auch die letzte Begründung mangelt, insofern die eine ebensowenig einen vernünftigen Zusammenhang zwischen ihren Kräften, als die andere für die Eigenschaften ihres Mediums anzugeben vermag.

Die Konsequenzen dieser Faraday'schen Theorie stimmen vollständig mit den Konstruktionen, welche aus unserer Hypothese hervorgehen, und ist es deshalb zweckmässig, in Maxwell's Worten das Wesentliche derselben anzuführen, weil aus ihnen weit bestimmter und ausführlicher die Grundhypothese und ihre Folgerungen hervorgeht, als aus Faraday's allgemeinen Sätzen.

Die Eigenschaften des nothwendigen, den körperleeren Raum erfüllenden, die Elektrizität absolut nicht leitenden, deshalb dielektrisch genannten Mediums werden von Maxwell folgenderweise formulirt:

> Ein Körperelement möge polarisirt genannt werden, wenn es auf seinen entgegengesetzten Seiten entgegengesetzte Eigenschaften erhält. Die elektrische Polarisation eines dielektrischen Mediums ist ein gezwungener Zustand desselben, in welchen es durch die Wirkung der elektromotiven Kraft versetzt wird, und welcher aufhört, sobald die Kraft weggenommen wird. Wir mögen diesen Zustand bestehend denken in einer sogenannten elektrischen Verschiebung, welche durch die elektromotorische Kraft verursacht wird. Wenn die elektromotorische Kraft auf

einen Leiter wirkt, so erzeugt sie einen Strom durch denselben; wenn aber das Medium ein Nichtleiter ist, so kann der Strom nicht hindurchfliessen, sondern die Elektrizität wird in dem Medium in Richtung der Kraft verschoben, um einen Betrag, welcher von der Grösse dieser Kraft in solcher Weise abhängt, dass die Verschiebung zu- und abnimmt in demselben Verhältniss wie jene Kraft zu- und abnimmt.

Die Grösse der Verschiebung wird gemessen durch das Quantum von Elektrizität, welches die Einheit der Oberfläche durchsetzt, wenn die Verschiebung von Null bis zu einem bestimmten Betrage zunimmt. Dies ist also auch ein Maass der elektrischen Polarisation.

Die Analogie zwischen der eine elektrische Verschiebung bewirkenden Kraft, und einer gewöhnlichen mechanischen Kraft, welche einen elastischen Körper verschiebt, ist so augenscheinlich, dass ich mich bewogen fühle, das Verhältniss der elektrischen Kraft zu der korrespondirenden Verschiebung den Koeffizienten der elektrischen Elastizität des Mediums zu nennen.

Wenn eine Ladung e gleichmässig über eine Kugelfläche ausgebreitet ist, so wird die Kraftresultante an irgend einem Punkte des die Kugel umgebenden Mediums numerisch gleich sein der Ladung e, dividirt durch das Quadrat des Kugelradius. Diese Kraftresultante ist nach unserer Theorie begleitet von einer Verschiebung der Elektrizität in der Richtung von der Kugel nach Aussen.

Deshalb ist die ganze Verschiebung e proportional der Ladung und unabhängig vom Radius.

In Richtung der Kraftlinien herrscht ein Zug, und senkrecht zu denselben ein Druck; die Grösse aller dieser Kräfte ist gleich, und eine jede proportional dem Quadrat der Kraftresultante an jedem Punkt.

Wenn wir nach dieser Hypothese die Totalenergie des Mediums berechnen, so finden wir sie gleich derjenigen, welche der Elektrisirung der Körper zugeschrieben werden muss auf Grund der Hypothese direkter Fernewirkung. Beide Hypothesen sind demnach mathematisch äquivalent.

Jeder Fall von elektrischer Ladung oder Entladung darf daher betrachtet werden als eine Bewegung in geschlossenem Umlauf, sodass an jedem Querschnitt desselben dieselbe Quantität Elektrizität in derselben Zeit hindurchgeht; und dies nicht allein im voltaischen Strome, wo dies stets anerkannt wurde, sondern auch in denjenigen Fällen, in welchen bisher angenommen wurde, dass Elektrizität sich anhäufe.

Deshalb muss die Elektrisirung an der begrenzenden Fläche des Leiters und Nichtleiters, welche in der gewöhnlichen Theorie Elektrisirung des Leiters genannt wird, in der Induktions-Theorie Oberflächenelektrisirung des Nichtleiters genannt werden.

Nach dieser Theorie ist jedwede Elektrisirung die Restwirkung der Polarisation des Nichtleiters. Diese Polarisation existirt in dem ganzen Innern der Substanz, ist jedoch dort neutralisirt durch die Nachbarlage entgegengesetzt elektrischer Theile, sodass nur an der Oberfläche des Nichtleiters die Wirkung der Elektrisirung sichtlich werden kann.

Ist das dielektrische Medium kein vollkommener Insulator, so giebt der Spannungszustand, welchen wir elektrische Polarisation nannten, fortwährend nach und seine Potenzialenergie wird in Wärme verwandelt.

In dem Phänomen, welches elektrischer Strom genannt wird, strebt die beständige Verschiebung der Elektrizität durch das Medium den Spannungszustand ebenso rasch wiederherzustellen als die Leitungsfähigkeit des Leiters denselben ermatten lässt, ... sodass das Endresultat der zur Erhaltung des Stromes aufgewendeten Energie in der Temperaturerhöhung des Stromleiters besteht."

Aus diesen wenigen einfachen Anschauungen entwickelt Maxwell die ganze mathematische Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, welche sich von der gewöhnlichen nur dadurch, aber charakteristisch genug, unterscheidet, dass sie dasselbe mit Differenzialformeln sagt, wozu die andere Integrale gebraucht. Maxwell hält aber hiermit nicht die Sache für abgeschlossen, wie es die übliche Theorie thun

zu dürfen glaubt, nachdem sie einmal zwei entgegengesetzte fernwirkende Kräfte postulirt hat, sondern fährt fort:

> „Man muss sich aber beständig erinnern, dass wir hiermit nur den ersten Schritt in der Theorie der Wirkungsweise durch ein Medium gemacht haben. Wir haben vorausgesetzt, dasselbe befinde sich in einem Spannungszustande, haben aber in keiner Weise diesen Zustand erklärt oder dargelegt, auf welche Weise er aufrecht erhalten wird. Dieser Schritt scheint mir aber schon ein wichtiger zu sein, weil er aus der Wirkung aneinanderliegender Theile des Mediums Erscheinungen erklärt, welche man bisher nur aus direkter Fernewirkung für erklärlich hielt.
>
> Ich habe nicht vermocht, den zweiten Schritt zu machen, nämlich aus rein mechanischen Betrachtungen die Spannungen des dielektrischen Mediums nachzuweisen. Ich lasse diese Theorie also dort stehen, bis wohin ich sie geführt habe."

Ich werde im Folgenden nachweisen, dass unser Aether genau die Eigenschaften hat, deren Maxwell bedurfte zu seiner mathematischen Entwickelung aller elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Ausserdem wird sich ergeben, dass unsere Konstruktion der Körper alle Eigenschaften ermöglicht, welche wir bei Leitern und Nichtleitern beobachten, und werden sich dann aus Verbindung dieser Eigenschaften des Aethers und der Körper alle elektrischen Erscheinungen als Bewegungen der Atome resp. Kraftpunkte nach rein mechanischen Gesetzen ergeben.

Das der Theorie von Faraday nothwendige Medium soll, kurz gesagt, wie eine nicht zusammendrückbare Flüssigkeit sich verhalten, und trotzdem bei einem Drucke Spannungen zeigen, welche parallel und senkrecht zu diesem Drucke gerichtet sind. Dieses sind, unseren gewöhnlichen Vorstellungen nach, unvereinbare Eigenschaften; denn wir denken dabei an die uns bekannten Flüssigkeiten, an welchen wir beobachten, dass ein jeder Druck sich gleich nach allen Richtungen hin ausbreitet; oder auch an die mathematische Fiktion einer vollkommenen inkompressibelen Flüssigkeit, welcher

ebensowenig die Möglichkeit innerer Spannungen in verschiedenen Richtungen zugesprochen wird. Folgern wir aber die Eigenschaften unseres Aethers aus seinem Grundgesetze — $\frac{m_, m_{,,}}{r^2}$, so werden wir finden, dass er nothwendigerweise beide Eigenschaften zeigen muss, und dass aller Widerspruch zwischen denselben verschwindet, sobald wir die Zusammendrückbarkeit genau definiren, was eben bisher nicht gethan worden ist.

Unser Aether, als relativ ruhend gedacht, hat nur Potenzialenergie, und das Quantum derselben für ein gewisses Raumvolum ist eine Funktion von der Potenzialenergie des den ganzen Raum erfüllenden Aethers. Da dieses letztere Quantum aber weder vermehrt noch vermindert werden kann, weil nach logischem Gesetze im Laufe der Zeit weder eine Neuschöpfung noch eine Vernichtung der Materie oder der Kraft (Leistungsfähigkeit, Wirkungsweise der Materie) eintreten kann, so muss auch das Quantum von Potenzialenergie irgend eines Aethervolums an jeder Stelle des Raumes konstant sein; mit anderen Worten: die Volumdichte des Aethers ist konstant und überall die gleiche.

Eine Ausnahme hiervon bildet allerdings der bei den Kohäsionserscheinungen betrachtete Fall, und es wäre deshalb genauer zu sagen: die mittlere Dichte des Aethers für Volumina oder Ausdehnungen, wogegen δ verschwindet, ist konstant. Jedoch können wir der Einfachheit halber vorläufig hiervon absehen, können späterhin diese Korrektion einführen. Denn es ist hier von keiner Ausnahme des Grundgesetzes die Rede, sondern von einer Unvollkommenheit in Formulirung desselben in Bezug auf den Begriff der Zusammendrückbarkeit. Diese sogenannte Ausnahme giebt die Erklärung zu mehreren Erscheinungen auf dem Gebiete der Elektrizität und Kohäsion.

Diese Konstanz der mittleren oder Volumdichte des Aethers verhindert aber gar nicht, dass die lineare Dichte desselben in verschiedenen Richtungen sehr verschieden sein kann; eine solche Verschiedenheit der linearen Dichte findet ja schon bei jedem Elemente des Aethervolums, z. B. bei unserem Oktaeder von Kraftpunkten statt, dessen Diagonalen länger als seine Kanten sind,

Betrachten wir ein aus 8 Kraftpunkten auf Würfelecken gebildetes Element des Aethers, so lässt sich dasselbe zu sehr verschiedenen achteckigen geometrischen Körpern umgestalten, welche alle das Volum des ersten Würfels haben, jedoch in der Entfernung der konstituirenden Punkte, also in der linearen Dichte nach verschiedenen Richtungen alle ungleich sind. Würde man durch zweckmässige Vertheilung äusserer Kräfte auf die Kraftpunkte des Würfels ein Gleichgewicht derselben hervorbringen, so würden sich nach Umformung des Würfels in eine jede andere Figur von gleichem Inhalte die verschiedensten Spannungen in den verschiedenen Richtungen kundgeben. Dasselbe würde an einem Stücke Gummi zu beobachten sein, welches im gewöhnlichen Zustande keine Spannungen hat, dessen Theile also in derselben Lage zueinander bleiben, sobald wir es in andere Formen von demselben Rauminhalte hineinzwängen. In der Unterscheidung der Volumdichte von der linearen liegt also die Lösung der vorhin als unmöglich erscheinenden Forderung einer rationellen Vereinbarkeit der für das elektrische Medium geforderten Eigenschaften, eines inkompressibelen Mediums, welches trotz dieser Inkompressibilität innere Spannungen zulässt.

Untersuchen wir jetzt, was geschieht, wenn wir eine Verschiebung des Aethers ausführen.

Hier ist gleich zu bemerken, dass bei dem Grundgesetz des Aethers, der Konstanz seiner Volumdichte, die Spannungen in einigen Stücken verschieden von denjenigen fester Körper, welche die Mechanik in der Theorie der Elastizität betrachtet, ausfallen werden; zum Beispiel: Das Verhältniss der Geschwindigkeit v longitudinaler Wellen zu derjenigen $v_,$ transversaler, in festen Körpern, wird bestimmt als

$$\frac{v^2}{v_,^2} = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu},$$

wobei μ das Verhältniss der Längsdehnung l zur Querkontraktion q. Für den Aether wird $\frac{l}{q} = \frac{1}{2}$, demnach $\frac{v^2}{v_,^2} = \frac{1}{0}$, was sinnlos ist. Obige Formel taugt also nicht zu dieser Bestimmung im Aether, weil sie von Voraussetzungen ausgeht, welche für ihn nicht zutreffen.

Wir kennen Leiter und Nichtleiter der Elektrizität. Diese Eigenschaften müssen ebensogut mechanisch erklärt werden, wie alle übrigen. Vorläufig nehmen wir jedoch an, dass die leitenden Körper die freie Bewegung des Aethers in ihrem Inneren zulassen, sodass derselbe dort ebensowenig eine Spannung in bestimmter Richtung annehmen kann, wie die Theile der uns bekannten frei beweglichen Flüssigkeiten. Die Nichtleiter dagegen würden an der Eigenschaft des Aethers theilnehmen, vermöge derer ein jeder Kraftpunkt gegen alle seine Nachbarpunkte bis zur Distanz $\mathfrak{D}$ eine stabile Gleichgewichtslage hat. Treiben wir also durch eine dazu taugliche motorische Kraft ein Aetherquantum in einen Leiter hinein, so wird dieser dem Strome keinen Widerstand entgegensetzen, sondern diesen durch sich hindurchgehen und an irgend einer dazu tauglichen Oberfläche austreten lassen. Der Aether verhält sich im Inneren des Leiters wie die mathematische inkompressibele Flüssigkeit. Befindet sich aber an der Austrittfläche des Leiters wiederum Aether, so kann sich der neuhinzukommende nicht in demselben wie in einer Flüssigkeit zerstreuen, weil ein jeder Punkt des neuen Aethers gegen jeden Punkt des an der Oberfläche vorhandenen bis zur Distanz $\mathfrak{D}$ eine stabile Gleichgewichtslage hat. Der neue Aether kann also an der Oberfläche nur ausfliessen, insofern er den alten zurückschiebt. Seine Volumdichte bleibt dabei unverändert; er wird aber Spannungen in dem umgebenden Aether und sich selbst, insoweit er aus dem Körper ausgetreten ist, erzeugen. Ist nun eine Zurückschiebung des äusseren Aethers nicht möglich, weil kein Leiter in der Nähe, so kann auch kein Aether ausfliessen, und die motorische Kraft erzeugt nur Spannung oder Druck an der Ausflussoberfläche des Leiters. Zur besseren Veranschaulichung nehmen wir aber einstweilen an, dass Verschiebung möglich sei, also ein Quantum Aether aus dem Leiter in den umgebenden Aether ausfliessen könne.

Nehmen wir einen Leiter A von Kugelgestalt. Wollen wir ein Quantum Q Aether durch denselben hindurchtreiben, so müssen wir diesen Aether von anderswo her entnehmen. Sei dieser andere Ort ein Leiter B von demselben Volum und Gestalt (Fig. 9), so wird die Arbeit der motorischen Kraft darin bestehen, den Aether von B und dessen Umgebung aufzusaugen und durch die Verbindung

w durch den Leiter *A* hindurchzutreiben, sodass er sich um *A* in konzentrischen Schichten lagern kann. Die mittlere Dichte des ganzen Aethers wird dadurch nirgendwo verändert. Die konstante Dichte bewirkt nun, dass während dieses ganzen Prozesses in einem jeden Zeittheil dasselbe Volum Aether durch eine jede um *A* oder *B* beschriebene Kugelfläche hindurch tritt. Für die Flächeneinheit ist dieses Volum umgekehrt proportional dem Quadrat des Kugelradius. Die auf eine jede Flächeneinheit ausgeübte motorische Kraft steht demnach in demselben Verhältniss, und gleicherweise die Gegenwirkung dieser Kraft, d. h. die durch dieselbe im äusseren Aether erzeugte Spannung. Da nämlich der äussere Aether kein Leiter ist, so wird er trotz seiner konstanten Volumdichte lineare Verschiebungen seiner Punkte erleiden, und zwar wird ein jeder Punkt zwischen *A* und *B* sich von *B* nach *A* bewegen, ein jeder links von *A* gelegene Punkt sich von *A* weiter entfernen, und ein jeder rechts von *B* gelegene sich dem *B* nähern. Die durch Uebertragung eines solchen Ouantums Elektrizität *Q* von *B* nach *A* hervorgebrachte Ladung der Leiter *B* und *A* besteht in unserer Theorie darin, dass in dem äusseren Aether eine nach *B* hin gerichtete (deshalb negativ genannte), und von *A* weg gerichtete (deshalb positiv genannte) Spannung hervorgerufen wird. Die hierdurch im äusseren Aether erregten Spannungslinien zeigt Figur 13.

Zur grösseren Einfachheit bei Erörterung der Art und Weise dieser Verschiebungen denken wir uns aber zweckmässig *B* so weit von *A* entfernt, dass die Verschiebungen um *B* keinen messbaren Einfluss auf diejenigen bei *A* ausüben.

Wir fingiren also den Leiter *A*, welcher ein Quantum *Q* Aether ausströmt, und inmitten des Raumes als einziger Körper existirt. Die Richtung der Ausströmung kann nur von der Oberfläche abhängen, und da diese überall gleichartig vorausgesetzt wird, so ist diese Richtung normal zur Oberfläche.

Wird nun durch diese normal zur Oberfläche gerichtete Kraft eine positive oder negative Spannung, d. h. die lineare Verdichtung oder Verdünnung erzeugt, so muss offenbar in der dazu senkrechten Richtung, tangential zur Oberfläche die entgegengesetzte lineare Spannung eintreten, damit die Konstanz der Volumdichte des Aethers gewahrt bleibe. Senkrecht zu den normalen Spannungslinien finden

also Pressungen statt, und muss die Summe der in der Tangentialebene erzeugten Kräfte Null sein, wenn Gleichgewicht (Ruhe) im Aether stattfinden soll. Die Aequipotenzialflächen sind in diesem Falle (in der gezeichneten Ebene) Kreise, und die vorhin genannten, durch die motorische Kraft erzeugten positiven oder negativen Spannungslinien deren Radien. Wir können dieselben deshalb Druck- resp. Zugkräfte nennen, gemessen durch die Richtung und Grösse der + & — Spannungslinien, und die von diesen letzteren erzeugten Tangentialspannungen als Richtkräfte der Druck- und Zuglinien (Faraday's Kraftlinien) bezeichnen.

Verbildlichen wir uns diesen Vorgang an einem Würfel resp. quadratischen Aethergruppe $a\,b\,c\,d$ (Fig. 10). Wirkt die motorische Kraft in der Richtung $b\,d$ und nähert dadurch die beiden Punkte einander, so wird deren kombinirte Wirkung auf a und c vergrössert, weil sie näher zu diesen Punkten kommen und auch die Winkel $\beta a \delta$, $\beta c \delta$ spitzer sind als bad, bcd. Mit Annäherung von $b\,d$ müssen also $a\,c$ sich voneinander entfernen, und die Vergrösserung der Wirkung von b auf d muss gleich derjenigen von $b\,d$ auf $a\,c$ sein.

Zu bemerken ist hierbei noch, dass auch die stärksten elektrischen Ladungen nur die Ueberführung eines äusserst geringen Aetherquantums erfordern werden. Es geht dies schon aus der Elastizität des Aethers hervor, welche viele tausend Millionen Male diejenige des Stahles übertrifft; weiter stimmt hiermit die Beobachtung, dass eine ungeheure Anzahl von Ladungen eines Leiters nothwendig ist, um ein Quantum Aether zu transferiren, welches einem Strome von allerkürzester Zeitdauer entsprechen sollte.

Aus unserer Betrachtung (Kap. I) geht ebenfalls hervor, dass es eine bestimmte Grenze giebt, über welche hinaus der Unterschied von positiver und negativer Spannung nicht erhöht werden kann. Diese Grenze wird erreicht, wenn bei vorausgesetzter Würfelstruktur des Aethers ein verschobener Punkt die Maximumgrenze der Kurve $\pm\,\varphi$ überschreitet. Es findet dann plötzliche Umlagerung der Aetherpunkte, elektrische Entladung, statt. Bei jeder anderen Struktur muss es gleichfalls eine solche Grenze geben.

Hiermit sind die fundamentalen Bedingungen, als mechanisch nothwendig unserer Hypothese entspringend nachgewiesen, woraus Maxwell das ganze Gebäude seiner Theorie der Elektrizität aufführt. Der komplizirte und allen möglichen Einwürfen wehrlos gegenüberliegende Mechanismus, nach dessen Bilde sich Maxwell die Bewegungen des Aethers erfolgend dachte, wird in unserer Konstruktion unnöthig. Werde nun auch gezeigt, wie die verwickeltesten Erscheinungen dieses Agens sich auf einfache mechanische Anschauungen zurückführen lassen.

Bewegung elektrisch geladener Körper.

Befindet sich ein einzelner elektrischer Körper im Aether, so steht seiner freien Bewegung nichts entgegen; denn die Drucke auf ihn sind in jeder Richtung gleich, und die Spannungen des Aethers werden bei der Bewegung auf andere Stellen desselben übertragen, gerade so wie bei der Wellenbewegung auch stets andere Stellen des Mediums die Lageveränderung erleiden.

Befinden sich dagegen zwei oder mehrere elektrische Körper im Raume, so ist kein Gleichgewicht mehr vorhanden. Ein jeder Körper bewirkt dann eine seinem elektrischen Potenzial entsprechende Verschiebung der nächsten Aetherpunkte, und die Körper wirken dadurch aufeinander ein. Aus dem Satze, dass die Theile eines Systems sich stets so bewegen, dass ihr Gesammtpotenzial sich verringert, in kinetische Energie verwandelt, folgt dann sofort, dass entgegengesetzt elektrische Körper sich zueinander, gleich elektrisirte sich voneinander bewegen.

Dies gilt ebensogut für Leiter wie Nichtleiter.

Induktion.

Ein jeder elektrisirter Körper erregt im ganzen Aether Spannungen, weil er die lineare Dichte des Aethers in gewissen Richtungen ändert. Eben darauf beruhte auch die Möglichkeit einer Lichtschwingung s. Kap. VII. Diese Spannungen müssen aber durch die Anwesenheit eines Leiters in seiner Nähe, resp. in Entfernungen, bis wohin wir Wirkungen wahrnehmen bei einer gewissen Stärke der Ladung, Veränderungen erleiden, weil der Theil des spannungsfähigen Aethers von dem Leiter, d. h. einem nichtspannungsfähigen Raume, ein-

genommen wird, also den dort vorhandenen Elementen des Aethers die Gleichgewichtsbedingungen geändert werden.

Betrachten wir einen Leiter *a* (Fig. 11), welcher innerhalb eines konzentrisch denselben umschliessenden Leiters *b* gelegen ist, und führen demselben ein Quantum *Q* von Aether zu. Die durch Zuströmen des Aethers erzeugte Spannung (Ladung) heisse die positive. Das Quantum *Q* wird von *a* an der Oberfläche ausströmen und in gleicher Zeit ein gleiches Aethervolum aus der inneren Kugel durch den Leiter *b* hindurch nach dem äusseren Aether durchschieben. Wir haben jetzt im inneren und äusseren Aether dieselbe positive Spannung, welche für eine jede, um *a* konzentrische Kugelfläche dem Betrage nach gleich gross ist. In *a* und *b*, weil sie Leiter sind, keine Spannung. Setzen wir jetzt *b* in leitende Verbindung mit dem ∞ grossen Leiter Erde, so wird die Spannung ausserhalb *b* das zugeführte Quantum *Q* nach der Erde von Spannung Null abströmen lassen. Die Spannung innerhalb *b* kann sich aber nicht gegen die Erde ausgleichen, weil hier im Inneren kein überschüssiger Aether vorhanden ist, ein Fortströmen des inneren Aethers also eine Erhöhung seiner Spannung erfordern würde. Der äussere Aether kehrt also durch die Verbindung mit der Erde in seinen normalen Zustand zurück, während der innere in unverändertem Zustande verbleibt.

Bewegen wir jetzt *a* nach Aussen, ohne *b* damit zu berühren, so werden die Aetherschichten, durch welche *a* bewegt wird, nacheinander die der Entfernung von *a* in geladenem Zustande entsprechenden Spannungen annehmen. Die Veränderungen des Aethers geschehen dabei ähnlich wie bei der Bewegung eines Körpers durch einen elastischen Schlauch. Die Spannungen desselben bleiben für einen jeden Querschnitt des Körpers dieselben, obschon die Theilchen, welche die Spannungen erleiden, in jedem Augenblicke andere sind. Ist der Schlauch vollkommen elastisch und übt gegen den Körper keine Reibung aus, so findet kein Kraftverlust bei der Bewegung statt.

Nach Maassgabe, wie *a* aus *b* entfernt wird, treten an die Stelle der innen positiv $(+e)$ gespannten Aetherschichten normale von geringerer und schliesslich von Null Spannung. Dadurch wird aber der frühere Gleichgewichtszustand gegen den äusseren Aether

von normalem Druck aufgehoben, und dieser muss seinerseits in die dem inneren entgegengesetzte Spannung treten, wobei er das $+e$ entsprechende Quantum Q Aether durch den Leiter b hindurch und dem aus b sich entfernenden Körper a auf seinem ganzen Wege nachschiebt. Ist in dieser Weise a so weit von b entfernt worden, dass im Inneren von b Spannung Null herrscht, so muss an der äusseren Fläche $-e$ vorhanden sein. Zur Entfernung von a wird bei diesem Vorgange eine Kraft nothwendig gewesen sein, welche ebensogross ist als diejenige, welche direkt die Spannung $+e$ oder $-e$ an irgend einer Kugelfläche hervorgebracht hätte.

An einem mechanischen Bilde mit unseren gewöhnlichen Materialien können wir diesen Vorgang versinnlichen.

Sei o (Fig. 12) ein fester Punkt, a und b zwei elastische an ihren Enden eingeklemmte Stäbe; c eine Flüssigkeit von so grosser Adhäsion an a und b, dass sie bei deren Biegungen keine leeren Räume zwischen diesen Stäben entstehen lässt. Von o gehe eine starre Stange nach a. Dieses System kann betrachtet werden als ein Kugelausschnitt des vorigen (Fig. 11). Der feste Punkt o steht für den Körper a; die Stäbe po und a für den inneren Aether; die Flüssigkeit c für das umschliessende leitende Gefäss b, der Stab b für den äusseren Aether.

Verlängern wir diese Stange ao um ein kleines Stück w, so entspricht dies einer positiven Ladung des Systems ao, d. h. des inneren Körpers. Diese Verlängerung schiebt die Mitte von a, b und c um ein gleich grosses Stück nach Aussen; bringt dadurch eine nach aussen konvexe (positive) Spannung der Stäbe a und b hervor, welche dem inneren und äusseren Nichtleiter entsprechen, und verschieben gleichfalls die Flüssigkeit c (den Leiter) ohne jedoch Spannungen in ihr zu erregen, weil das ja eben in einer Flüssigkeit, deren Elemente jedem Drucke nachgebend sich verschieben, nicht möglich. Das Entladen von b entspricht nun dem Ersetzen dieses Stabes durch einen nicht gespannten von demselben Material und derselben Form wie der konvexe gespannte Stab. Wird jetzt das Spannstück w weggenommen und a wieder in seine normale Lage zurückgeführt, so ist dies nur möglich, wenn zugleich dem Stabe b eine ebensogrosse und entgegengesetzte Spannung (resp. Verschiebung) ertheilt wird, d. h. der geladene Körper a muss aus

dem Inneren von *b* entfernt werden; oder in Fig. 12, der Stab *a* muss durch einen Zug nach *o* hin in seine normale gerade Lage zurückgeführt werden, weil der neue konvexe aber nicht gespannte Stab *b* ein Zurückgehen des Systems in seine Anfangslage verhindert. Durch diesen Zug wird dann zugleich der konvexe nicht gespannte Stab *b* in einen geraden von der Spannung $-e$ übergeführt. Die Kraft, welche diesen Zug ausführt, wird geliefert von der Spannung $+e$ des Stabes *a* und dem Transport des geladenen Körpers (der Ladung *w*) aus dem Innern von *b* nach Aussen.

Es muss stets festgehalten werden, dass, was hier Verschiebung eines Volums *Q* genannt wurde, nur ein Hülfsausdruck ist. Eigentlich sollte es „Grad der Spannung" heissen, welche Spannung gemessen wird durch das, was wir Quantum *Q* nennen. Eine wirkliche Verschiebung durch den Aether findet ebensowenig statt, wie eine Verschiebung der Molekel der Stange *ao* durch die Stäbe *a* und *b* hindurch, wenn dieselben gebogen werden. Dieser Grad der Spannung ist, was in Maxwell's Formeln „Verschiebung eines Quantums von Elektrizität", in der Flüssigkeitentheorie „Dichte oder Masse der Elektrizität an der Oberfläche" genannt wird. In der Flüssigkeitentheorie muss immer angenommen werden, dass diese Masse elektrischer Flüssigkeit in einer zwar sehr dünnen, aber immer doch als Volum ausgedehnten Oberflächenschicht vorhanden ist. In unserer Spannungstheorie ist der Sitz der Elektrizität den mathematischen Formeln genau entsprechend, absolut nur an der Oberfläche. Ebensowenig ist ein verschobenes Quantum des Mediums, wie Maxwell meint, vorhanden.

Leiter und Nichtleiter.

Hiermit sind alle statischen Erscheinungen der Elektrizität erklärt. Es bleibt die Aufgabe, aus der atomistischen Konstruktion der Körper zu zeigen, dass diese, dem Aether gegenüber, die verschiedensten Grade von Leitungsfähigkeit aufweisen können.

Aus dem Grundgesetz des Aethers wurde die stabile Lage eines jeden seiner Punkte abgeleitet; daraus folgte seine grosse Elastizität und zugleich die Eigenschaft, dass die Verschiebung seiner Elemente nicht von einer freien Beweglichkeit derselben begleitet ist, sondern eine Spannung erzeugt, welche solange anhält

wie die motorische Kraft, welche dieselbe erzeugt. Die Spannungen in ihm können also nicht fortgeleitet und durch freie Beweglichkeit seiner Theile ausgeglichen werden, weil diese Elemente zu ihren nächsten Nachbarelementen stabile Lagen haben, und diese Stabilität sich bei Spaunungen bis in jede Entfernung hin bemerklich macht; oder mit andern Worten: der Aether ist ein Nichtleiter der Elektrizität.

Denken wir demgegenüber einen dehnbaren, nicht elastischen Schlauch, etwa die Hülle eines Luftballons, zum Theil mit Aether gefüllt, also nicht vollständig aufgebläht, und an jedem seiner Punkte durch ein Gewicht so belastet, dass es den inneren Aetherdruck kompensirt. Werde an dem Querschnitt cc eine positive Spannung (Ausdehnung der Linie cc) im Aether erregt, so wird dieser Querschnitt sich soweit vergrössern, bis diese Spannung gegen die seitlichen resp. diejenigen aller Richtungen ausgeglichen ist. Denn das auf c lastende Gewicht vergrössert sich nicht durch die Spannung des Aethers. Es ist also überhaupt unmöglich, in dieser unelastischen Hülle eine bleibende Spannung des Aethers hervorzurufen, sondern, wenn man durch eine motorische Kraft von dem äusseren Aether einen Druck auf den inneren ausübt, so wird dem entsprechend ein Quantum Q des ersteren in den Schlauch hineingetrieben, derselbe bläht um ein Volum Q weiter auf, ohne dass Spannungen in seinem Inneren entstehen. Hiermit ist das Wesen des Leiters der Elektrizität dahin gekennzeichnet, dass die Molekelstruktur desselben eine nicht elastische Hülle für den im Leiter vorhandenen Aether bildet.

Diese Bedingung kann durch sehr verschiedene Molekularstrukturen erfüllt werden. So kann z. B. die geringere Dichte und Elastizität des Körperatoms dem Aether gegenüber schon ein Grund für mindere Spannungsfähigkeit, d. h. grössere Leitungsfähigkeit sein. Dies wäre zugleich ein Grund für eine gewisse Korrespondenz zwischen den optischen und elektrischen Eigenschaften. Je elastischer ein Körper ist, desto weniger Licht wird er absorbiren, desto durchsichtiger und ein desto schlechterer Leiter der Elektrizität wird er sein. Der schlechteste oder absolute Nichtleiter wird der Aether. Kein Körper kann aber ein absoluter Nichtleiter und ebensowenig ein ganz unelastischer, d. h. absoluter

Leiter der Elektrizität sein. Dass von dieser allgemeinen Regel der Korrespondenz von Diaphanität und Nichtleitung zahlreiche Ausnahmen sich vorfinden, erklärt sich leicht aus den durch die Molekelstruktur der Körper gegebenen Bedingungen.

Sodann ist es möglich, dass die Struktur einzelner Körper ein System von Kanälen bildet, in welchen der Aether sich schieben lässt ohne Spannung, ähnlich wie ein Packet von Stäben die Verschiebung derselben gegeneinander in einzelnen Richtungen zulässt. Wenn jene Aetherkanäle nur Krümmungsradien $> \mathfrak{D}$ haben, so ist die Verschiebung des Aethers in allen Richtungen möglich.

Als allgemeinste Strukturform, welche die linearen Spannungen gegenseitig ausgleicht, und dadurch Leitungsfähigkeit hervorbringt, dürfte aber diejenige anzunehmen sein, bei welcher die Atome eine kleine Schwenkung um gewisse Achsen ausführen können, unbeachtet des Bestandes ihrer Kohäsionsverhältnisse. Da nämlich die Atome keine Kugeln, sondern mehr oder weniger abgeflachte Rotationsfiguren sind und in verschiedenen Richtungen zu einander stehen, so kann eine solche Schwenkung alle linearen Spannungen ausgleichen.

Hierbei ist auch der Korrespondenz zwischen elektrischen und Wärmeleitern zu gedenken. Der gute elektrische Leiter gestattet, dass der Aether als Volum sich fortbewegt, wenn ihm überhaupt ein Ausweg geboten ist, also dass der Aetherstrom nicht in andere Bewegung umgesetzt werde.

Verwandelt sich das Moment des Stromes in Schwingungen der Molekel, so wird eben der Strom absorbirt und nicht geleitet. Alle Körper, welche die Lichtschwingung nicht fortpflanzen, dieselbe absorbiren, in Bewegung der Molekel verwandeln, werden geneigt sein dies auch dem strömenden Aether gegenüber zu thun. Ein Körper, welcher die Wärme gut leitet, pflanzt mit anderen Worten die veränderte Schwingung seiner Molekel rasch fort. Da diese Fortpflanzung nur durch Vermittelung des Aethers gesehehen kann, so liegt nahe zu denken, dass die schwingenden Molekel Aetherströme in Bewegung setzen, welche, je leichter sie sich fortbewegen, desto leichter den entfernteren Molekel die Gelegenheit geben, eine dem Aetherstrom gemässe Schwingung anzunehmen, also sich zu

erwärmen. Hiernach wäre die Wärmeleitung als vermittelt durch schwache elektrische Strömung zu denken.

Geschieht die Wärmefortpflanzung dagegen durch Schwingung des Aethers, so haben wir den durchsichtigen und diathermanen Körper, welcher sich selbst nicht erwärmt.

Auch kann man sich denken, dass die Molekelschwingung, welche ja ganz verschieden von der Aetherschwingung ist, immer grössere Kreise des Aethers in ihre Bewegung hineinzieht, ähnlich wie ein im Wasser in geschlossenen Kurven bewegter Körper seinen Wellenkreis beständig verändert; dass also die Wärmeleitung abhängt von der Leichtigkeit, mit welcher der innere an Spannungsfähigkeit von dem äusseren durchaus verschiedene Aether diese Bewegungsart aufnimmt und fortpflanzt. Diese Leichtigkeit würde offenbar mit der Fähigkeit des Aethers überhaupt im Körper fortzuströmen direkt zunehmen.

Der elektrische Strom.

Der elektrische Strom ist eine Fortbewegung des Aethers in den Leitern. Diese Bewegungserscheinung ist aber begleitet von Spannungen in dem umgebenden Aether oder sonstigen Nichtleitern; Spannungen, welche eben durch jene Fortbewegung erregt werden müssen nach den allgemeinen mechanischen Gesetzen; ebenso ihrerseits, wenn sie im dielektrischen Medium erzeugt werden, in den Leitern den Strom erregen müssen.

Bringen wir einen elektrisch geladenen Körper B (Fig. 9) mit einem Leiter ab in Verbindung, so wird das Quantum Aether E, welches dieser Ladung entspricht, welches also einer räumlichen Verschiebung dieses Quantums an die Aussenfläche von B, und demgemäss einer Zurückdrängung des äusseren Aethers um dieses Volum entspricht, als eine motorische Kraft auf den Aether in ab wirken. Da nun in ab zufolge seiner Eigenschaft als Leiter keine Spannungen bleiben können, so wird die ganze Verschiebung E sich mit der Geschwindigkeit L[1]) durch ab fortpflanzen und Spannungen

*) L = Geschwindigkeit des Lichtes d. h. der Aetherreaktion im freien Raume.

in Summe $= E$ an den Oberflächen des Leiters $a\,b$ erzeugen. Die motorische Kraft E hat also eine Wirkung hervorgebracht, welche gleich ist dem Transport von E mit Geschwindigkeit L, obschon dieser Transport nicht in Wirklichkeit stattgefunden, nicht E, sondern nur die dem E aequivalente Spannung sich fortgepflanzt hat. Denken wir uns nun das b Ende mit einem Leiter B verbunden, gegen dessen Volum $a\,b$ verschwindet, und setzen voraus, dass B von der Spannung E vollständig entladen wird, wenn wir B mittelst $a\,b$ mit A in Verbindung gesetzt haben, so wird dann A die ganze Spannung von B aufgenommen haben. Dann können wir sagen: das Quantum E ist von B nach A verschoben worden mit einer Geschwindigkeit $= \frac{a\,b}{L}$.

Auf diese Weise gebrauchen wir die Ausdrücke der Flüssigkeits-, resp. von Maxwells Verschiebungstheorie und erinnern uns der Bedeutung, welche diese Ausdrücke in unserer Hypothese haben.

Die statisch gemessene, elektromotorische Kraft E entspricht also einem kinetischen Moment EL, einem Transport, welchen sie pro Sekunde zu erregen vermag. Dieser kinetische Moment ist die elektrodynamische Maasseinheit dem E als elektrostatischer Maasseinheit gegenüber.

Wir können auch sagen: Die Wirkung der elektromotorischen Kraft E pro Sekunde in Leitern ist dieselbe als würde E mit Geschwindigkeit L in Richtung des Leiters fortbewegt. — Oder auch:

Wenn zwei elektrisirte Körper mit Geschwindigkeit L in gleicher Richtung fortbewegt werden, so üben sie gar keine mechanische Wirkung aufeinander aus. Denn diese mechanische Wirkung ist eine Folge der Spannungen, welche sie im Aether erregen. Diese Spannungserregung gebraucht aber Zeit, sie hat nur die Geschwindigkeit L. Wenn also die beiden Körper schon mit dieser Geschwindigkeit fortbewegt werden, so gelangen sie beständig in nicht gespannte Aetherschichten; ihre elektrischen Ladungen haben nicht die nothwendige Zeit, um ihrer Umgebung Spannungen mitzutheilen. Aus dieser Betrachtung und den betreffenden Beobachtungen, welche bestätigen, dass die Ströme sich so verhalten, als würde ein Quantum Aether mit $v = L$ fortbewegt,

folgt, dass man an keine instantane Fernewirkung der elektrischen Körper zu denken hat.

Was die wirkliche Fortbewegung des Aethers im Leiter anbetrifft, die kinetische Energie, welche sich theilweise in Wärme umsetzt, so scheint mir, dass diese auch bei den intensivsten Strömen eine langsame ist. Eine Bestimmung derselben wäre möglich, wenn wir die absolute Dichte unserer Körper kännten, oder vielmehr die absolute Dichte des Aethers. Aus der absorbirten kinetischen Energie, der Wärme, und ihrem Aequivalent als Massentransport könnten wir dann auf den Massentransport des ganzen Stromes schliesen.

Besteht der elektrische Strom in einer Fortbewegung des Aethers, so kann diese unter gewöhnlichen Verhältnissen nur in einer Richtung und zwar von Stelle des höheren zu der des niederen Potenzials stattfinden. Aus Weatstone's Experiment über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität hat man zwei Ströme folgern wollen. Bei der Entladung findet man nämlich an beiden Polen gleichzeitig den Funken, in Mitte der Leitung später.

Der Fehler dieser Schlussfolgerung ist, dass man in der gewöhnlichen Theorie nicht Strom und Veränderung der Spannungen unterscheidet. Die Ausgleichung der Spannung erfolgt von beiden Enden gleichzeitig, also in der Mitte später; deshalb kann man sagen: ein imaginäres Quantum E wird von beiden Seiten aus nach der Mitte hin verschoben. Der wirkliche Aetherstrom ist aber etwas ganz Anderes; derselbe findet gar nicht statt, wenn die Entladung zwischen positiver und negativer Elektrizität von gleicher Dichte vor sich geht. Mit anderen Worten: eine einzelne Entladung, der elektrische Funke, ist kein Strom; aber eine konsekutive Anzahl Entladungen erregen einen Strom.

Wir können uns dies an Fig. 3 deutlich machen. Bewegt sich der Stempel s aufwärts bis nahe an $s_,$, so wird der obere Theil der Röhre positiv, der untere negativ gespannt; bewegt der Stempel sich abwärts nach dem Boden hin, so finden die umgekehrten Spannungen statt. Lässt man den Stempel aus der gespannten Stellung los, so bewegt er sich nach seiner früheren Gleichgewichtslage hin, d. h. elektrische Entladung findet statt; von einem Strome kann aber nicht gesprochen werden. Wird die Aufwärtsbewegung

des Stempels aber beständig fortgesetzt, so findet bei jeder Passirung einer Gleichgewichtslage eine partielle Ladung und Entladung statt, und in Summa bewegt sich der Aether in Richtung der Pfeile, vorausgesetzt, dass zweckmässig angebrachte Leiter dies ermöglichen. Diese letztere Fortbewegung des Aethers ist der elektrische Strom.

Betrachten wir die durch den Strom entstehenden Spannungen im äusseren Aether, so finden wir zuvörderst ganz dieselben, wie die der statischen Elektrizität bei zwei entgegengesetzt gespannten Leitern. Die hierbei auftretenden Verhältnisse sind graphisch dargestellt in Fig. 13. Es ist in dieser Zeichnung angenommen, dass von der Kugel B ein Quantum Elektrizität (nach Ausdruck der Flüssigkeitstheorie) auf die gleich grosse Kugel A übertragen, also A positiv und B negativ geladen worden ist. Durch diese Ueberführung der Elektrizität haben sich alle Punkte des Aethers aus ihrer früheren Gleichgewichtlage verschieben müssen in Richtung der Pfeile auf den Linien a, b, c, d. ... Dies sind die Zug- und Drucklinien (Faraday's Kraftlinien) der motorischen Kraft von A und B. Die zu ihnen normalen Kurven sind, was wir vorhin Linien der Richtungskräfte nannten. Sie bilden im Raume Aequipotenzialflächen der elektromotorischen Kraft und die auf ihnen stehenden Zahlen geben die Abnahme dieser Kraft mit der Entfernung an.

Wird das eine Ende eines Stromes konstant auf der Spannung $+e$ und das andere auf der Spannung $-e$ durch irgend eine dazu taugliche Kraft erhalten, so findet in dem Leiter eine Aetherströmung statt, und ausserhalb des Leiters durch den ganzen Raum hindurch entstehen die Aetherverschiebungen resp. Spannungen, wie in Fig. 13 gezeichnet. Wird umgekehrt ein Leiter in den solcherweise gespannten Aether gebracht, so muss in ihm die entsprechende Strömung eintreten. Hält man den Strom nur für ein kinetisches Phänomen, so müsste man seinen Elementen allerdings jene aller Logik widersprechenden, einer absoluten Bewegung und einer absoluten Veränderungsgrösse dieser Bewegung proportionale Fernewirkung zuschreiben, wie W. Weber diese in seinem elektrischen Grundgesetz fordert.

Der Induktionsstrom.

Die durch die Spannung des umgebenden Aethers in dem Leiter erzeugte Strömung wird Induktions- oder sekundärer Strom genannt.

Wenn durch einen Strom — der hier primärer Strom genannt werden möge — der umgebende Aether in Spannung versetzt worden, und ein zweiter Leiter in diesem Aether befindlich ist, so muss dem vorhergehenden zufolge ein Strom auch in diesem auftreten, weil die verschiedenen Spannungen des Aethers auf den im Leiter befindlichen ungespannten als motorische Kraft wirken. Die Erscheinungen dieses sekundären (Induktions) Stromes lassen sich an der Fig. 13 ablesen. Befindet sich der zweite Leiter parallel in der Nähe des ersten, so zeigen uns die Pfeile, dass die motorische Kraft in umgekehrter Richtung des primären Stromes wirkt, der Induktionsstrom also in entgegengesetzter Richtung des induzirenden fliesst. Hat der Leiter des Induktionsstromes keinen Abfluss, so wird dieser Induktionsstrom aufhören, sobald die Widerstände des Leiters ein Gleichgewicht gegen die induzirende Kraft hergestellt haben. Es werden also im Allgemeinen nur Induktionsströme auftreten, wenn die Spannungen des den zweiten Leiter umgebenden Aethers sich ändern. Dieses findet statt, wenn die Entfernung der beiden Leiter, oder die Intensität des primären Stromes sich ändert. Nähert der zweite Leiter sich dem ersteren, so bewegt er sich von Stellen minder gespannten Aethers nach höher gespannten, die motorische Kraft wird also kontinuirlich gesteigert und verursacht den Induktionsstrom in entgegengesetzter Richtung des primären. Entfernen die Leiter sich voneinander, so vermindern sich die Spannungsdifferenzen an den konsekutiven Stellen des induzirten Leiters, und der Effect dieser Verminderung ist derselbe als wenn eine motorische Kraft in entgegengesetzter Richtung der Spannungen wirkte; der Induktionsstrom muss also in diesem Falle in gleicher Richtung wie der primäre fliessen. Aus demselben Grunde fliesst der Induktionsstrom in Richtung des primären, wenn die Intensität dieses letzteren abnimmt, in entgegengesetzter Richtung, wenn jene Intensität zunimmt.

Wirkung elektrischer Ströme aufeinander.

Nach demselben Schema können wir die Wechselwirkung der elektrischen Ströme überhaupt bestimmen. Es ist dabei nur zu beobachten, dass jedesmal einem primären Strom soviel Induktionsströme zugeordnet sind, als Stromleiter überhaupt vorhanden sind. Dass die Resultanten der Bewegung aus dieser Spannungstheorie genau mit der Beobachtung übereinstimmen, und ihr mathematischer Ausdruck dem Inhalte nach dasselbe aussagt wie die Formeln der Flüssigkeitentheorie, ist von Maxwell nachgewiesen worden[1]). Man hat dabei nur seine etwas vage Definition der Spannung und seinen Ausdruck „Verschiebung eines Quantums Elektrizität" in dem hier präzisirten Sinne aufzufassen. Mit unserer Konstruktion des Aethers heben sich die Widersprüche, welche man in seiner Vergleichung der Elektrizität mit einer inkompressibelen Flüssigkeit finden kann.

Der zweite Schritt, den Maxwell als nothwendig zum Abschluss von Faraday's Theorie suchte, ist damit gemacht.

Aehnlich wie vorhin für die Induktion der statischen Elektrizität kann auch für die Wechselwirkung der Ströme ein mechanisches Bild konstruirt werden. Der Aether figurirt dabei wiederum als ein elastischer Stab ab, dessen Enden in einer Entfernung, bis wohin die Spannungen des Stromes nicht reichen, eingeklemmt sind. Der Stab $\alpha\beta$ (Fig. 16) bedeutet den Strom; ein Druck von β nach α stellt denselben normal zur Spannungsfläche $a\alpha b$, welche sich bei α einbiegt. Wirkt ein zweiter Strom in Richtung $\delta\gamma$ parallel zu $\beta\alpha$, so gleiten beide Ströme an der reibungslosen Aetherfläche zueinander hin. Fliesst der Strom aber in Richtung $\delta,\gamma,$ so erhält die Spannungsfläche zwischen $\alpha,$ und $\gamma,$ eine S förmige Krümmung und die Ströme müssen sich voneinander entfernen. Hat man zwei rechtwinklig gegeneinander gerichtete Ströme $\alpha\beta$ und $\varkappa\lambda$, von denen $\alpha\beta$ fest, $\varkappa\lambda$ beweglich, so muss sich $\varkappa\lambda$ auf Spannungsflächen bewegen, welche parallel zu $a\alpha b$ über den ganzen Wirkungsbereich von $\alpha\beta$ ausgedehnt sind. $\varkappa\lambda$ wird sich

[1]) Treatise of El. & M. § 578 u. 641.

deshalb, wie die Krümmung des Stabes anzeigt, in Richtung des Stromes $\alpha\beta$ bewegen, wenn er nach $\alpha\beta$ hinfliesst; in der entgegengesetzten, wenn er von ihm wegfliesst.

Der in normalem Zustande für Volumina 𝔇 vollkommen flüssige Aether wird durch Erregung von Spannungsflächen zu einem widerstehenden Mittel gemacht, auf dessen mit der Lage leitender Körper sich verändernden Aequipotenzialflächen diese Körper fortgleiten müssen, sobald sie einen von der Normale dieser Flächen verschiedenen Druck ausüben, oder Bewegung haben, weil diese Spannungsflächen des Aethers mit den Körpern zu einem System verbunden sind.

X.

Magnetismus.

Alle magnetischen Wirkungen können aus elektrischen Strömen erklärt werden; das Umgekehrte findet aber nicht statt; also darf man schliessen, dass elektrische Strömungen die Ursache des Magnetismus sind. Es bleibt zu suchen, wo diese Ströme existiren und wie sie unterhalten werden. Ampère schloss, dass diese Ströme in den Molekeln zirkuliren, und nicht von einem Molekel zum andern fliessen. Er folgerte weiter, dass in dem Eisen und paramagnetischen Substanzen überhaupt diese Ströme immer existiren, und nur durch die Magnetisation eine parallele Lage erhalten. Nach Weber's Theorie des Diamagnetismus werden in diamagnetischen Substanzen die elektrischen Ströme erst durch den Magnetismus erzeugt.

Unsere Konstruktionen stimmen vollständig mit diesen Ansichten und geben bestimmte Vorstellung über Sitz und Bewegung dieser Ströme, welche allerdings von denjenigen Weber's abweichen.

Wie durch zahlreiche Experimente Ampère's und Weber's gezeigt, ist die Wirkung eines kleinen ebenen geschlossenen Stromes in einer Entfernung, welche gegen die Ausdehnung dieses Umkreises sehr gross, die gleiche wie die eines Magneten, dessen Axe normal zur Ebene dieses Umkreises steht und dessen magnetisches Moment gleich der Fläche des Umkreises multiplizirt mit der Stärke des Stromes. Unserer Anschauung zufolge verursacht dieser Kreisstrom eine Spannung des umgebenden Aethers analog den Spannungen, welche in einem festen Körper entstehen würden, wenn ein Ringstück seiner inneren Masse — welches also nach allen Seiten hin durch die Kohäsion in einer stabilen Lage gehalten, also nicht zu verwechseln mit der Torsion eines Stabes, — um einen bestimmten Winkel im Sinne der Ringfläche gedreht wird. Man sieht gleich, dass die hierdurch entstehenden Spannungen eine richtende Kraft (Drehungsmoment) senkrecht zur Ringebene, oder vielmehr transversal zu den Kraftlinien, und eine Druck- resp. Zugkraft in Richtung dieser Linien (Fig. 13 entsprechend) erzeugen.

Da in dem Strome in Bezug auf Spannungen ein jedes Stromelement zu seinem nachfolgenden zu betrachten ist wie ein positiver Pol zu einem negativen, so werden die durch einen Kreisstrom ab (Fig. 14, 15) in Richtung der Pfeile fliessend, im umgebenden Aether erzeugten Spannungsflächen die Form der in diesen Figuren angegebenen Schnittkurven ergeben. Die Druck- und Richtungslinien liegen auf diesen Flächen mehr oder weniger windschief.

Um diese Spannung aufrecht zu erhalten, muss sich Masse (Kraftpunkte) irgendwo rotatorisch bewegen. Es entsteht also die Aufgabe, den Sitz dieser Bewegung zu bestimmen.

Da alle unsere Atome aus rotatorisch bewegtem Aether bestehen, im freien Aether aber eine solche Bewegung nicht stattfindet, so ist die unserer Konstruktion mögliche Antwort zum Theil hiermit gegeben. Sehen wir nun, ob die den Atomen im Kap. II zugesprochene Bewegung diesen magnetischen Effekt hervorbringen kann.

Wir setzten Atome in Ringform, deren Kraftpunkte eine Rotation senkrecht zur Zentralkreislinie des Ringes haben. Die Bewegung der Kraftpunkte ist also bei diesem Atome dieselbe wie die eines elektrischen Stromes durch ein Solenoid in Ringform. Ein

solcher Draht als Stromleiter hat eine magnetische Kraft an jedem Punkt des inneren Ringes senkrecht zur Ebene, welche durch seine Axe geht

$$\varphi m = 2 n \gamma \frac{1}{r} \text{ wobei}$$

r die Distanz von der Axe, n die Anzahl der Windungen, γ die Stromstärke. Ausserhalb des Ringes ist keine magnetische Kraft.

Besitzt das Atom jedoch ausser dieser Bewegung noch eine Rotation im Sinne der Ringfläche, so sind die ersten Bedingungen zur Wirkung analog dem elektrischen Kreisstrom gegeben.

Hierbei ist noch zu bedenken, dass die Atome (Kap. III) von Anfang an gegeben sein müssen, d. h. ohne eine Spannung im freien Aether zu bewirken. Eine solche Spannung entsteht aber, wenn das Atom eine von seiner ursprünglichen Bewegung verschiedene annimmt. Dasselbe erzeugt also, mit Beibehaltung unserer Bezeichnungen, eine positive Aetherspannung, übt von seinem Inneren aus einen Druck auf den umgebenden Aether aus, wenn seine kinetische Energie sich vermehrt, eine negative, wenn sie sich vermindert.

Die elektrischen Ströme könnten aber auch Folge von Rotationen der Einzelatome um feste Axen im Molekel sein; denn es sind ganz gut feste Körper denkbar, deren Molekel geschlossene Aequipotenzialflächen oder Linien der Kohäsion enthalten, auf denen sich also die das Molekel konstituirenden Atome in geschlossenen Bahnen bewegen. Neue Spannungen zwischen den Atomen, und damit auch im umgebenden Aether können hierbei ebensogut durch vermehrte rotatorische Bewegung wie durch Winkelbewegungen der Rotationsaxen entstehen, wie schon bei Vergleichung der Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektrizität erwähnt wurde. Hiermit sind alle nothwendigen Elemente gegeben, um die magnetischen und elektrischen Erscheinungen auf blosse Bewegungsphänomene ebensogut zurückzuführen wie die übrigen Naturkräfte.

Wenn wir hiermit diese Betrachtungen abschliessen, welche die Faraday-Maxwell'sche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus in ihren Grundzügen reproduziren, so werde noch hervorgehoben,

dass ebensowenig wie Maxwell's Vorstellungen über die Struktur des Aethers und die Art und Weise, wie die magnetischen Wirkungen sich im Raume fortpflanzen, wir auch Maxwell's magnetische Theorie des Lichtes adoptiren können. Damit wird nicht ausgeschlossen, dass viele seiner Gleichungen, welche er gemeinschaftlich für die Lichtbewegung wie die elektrische Störung aufstellt, zweifelsohne ebenso brauchbar wie richtig sich erweisen werden; denn beiden Erscheinungen liegt dasselbe gestörte Medium zu Grunde.

Interessant ist aber eine Schwierigkeit, welche sich ihm entgegenstellte, und ihn häufig an der Fruchtbarkeit seiner Grundanschauung zweifeln machte. In verschiedenen seiner Schriften finden wir nämlich einen Versuch, auch die Gravitation auf die Wirkung seines hypothetischen Mediums zurückzuführen. Er sagt:

> Nachdem wir sowohl die magnetischen wie elektrischen Anziehungen und Abstossungen auf die Wirkung des umgebenden Mediums bezogen und gefunden haben, dass die Grösse derselben von dem umgekehrten Quadrat der Entfernung abhängt, werden wir natürlich auch bewogen zu versuchen, ob die Anziehung der Schwere, welche demselben Gesetze folgt, nicht gleicherweise auf die Wirkung des umgebenden Mediums zurückzuführen sei .... Die Annahme, dass Gravitation von einer solchen Einwirkung des umgebenden Mediums verursacht werde, führt aber zu dem Schlusse, dass jeder Theil des Mediums in seinem normalen ungestörten Zustande eine sehr grosse innere Energie besitzt, und dass die Gegenwart dichter Körper dieses Medium in einer solchen Weise beeinflusst, dass diese Energie überall vermindert ist, wenn eine Anziehung sich bemerklich macht.
>
> Da ich unfähig bin, zu begreifen, wie ein Medium solche Eigenschaften zu besitzen im Stande ist, kann ich auch nicht fortfahren, in dieser Richtung nach einer Ursache der Gravitation zu forschen.

Diese Eigenschaften des Aethers, welche Maxwell unvereinbar däuchten, zeigen sich in unserer Hypothese der Körperkonstruktion

nicht als eine Schwierigkeit, sondern als richtiger Ausdruck des Grundgesetzes der Natur, wie in Kap. IV erläutert.[1])

---

[1]) Es ist wohl kaum nöthig darauf hinzuweisen, dass die hier konstruirten ponderabelen Atome ebensowenig etwas gemeinsames haben mit Maxwells rotatorischen Aetherbewegungen, als mit Secchi's Stosswirbeln oder Descartes Universalwirbelei, noch mit den Wirbeln widerstehender Flüssigkeiten, welche in der Neuzeit zu atomistischen Konstruktionen versucht worden sind.

Dem Gange physikalischer Lehrbücher folgend, wäre hier die Stelle, auch etwas über die räthselhaften Erscheinungen der Elektrolyse zu sagen.

Dass jede Kohäsionsänderung der Körper von elektrischen Ladungen und Entladungen, jenachdem auch von Aetherströmen begleitet ist, und dass ebenso die Erregung der letzteren Ursache der ersteren Erscheinungen sein kann, folgt direkt aus unserer ganzen Anschauungsweise. Um aber etwas mehr zu sagen, oder auch nur als wahrscheinlich zu vermuthen, müssten wir eine Kenntniss der Molekelstruktur der Flüssigkeiten, im Vergleich zu derjenigen fester Körper, besitzen Wenn einmal spezielle chemische Eigenschaften der Substanzen aus unserer Atomkonstruktion abgeleitet werden können, dann wird die Unterlage zu Spekulationen hierüber gegeben sein. Bei unserer heutigen Unkenntniss über die innere Struktur der Flüssigkeiten wären weitere Worte über diesen Gegenstand werthlos.

Ich muss gestehen, dass ich die Zurückführung der elektrischen Erscheinungen auf den allgemeinen Wirkungsmodus der Natur — $\frac{1}{r^2}$, welche mir die meisten Schwierigkeiten machte, die endlich durch das aus dem Satze von der Konstanz der Energieen abgeleitete Prinzip von der konstanten Volumdichte des Aethers gegenüber veränderlichen linearen Spannungen überwunden wurden, — als eine der besten Stützen für diese gemeinsame Theorie der Naturkräfte betrachte, und wohl nicht unbescheiden bin, wenn ich die Physiker auffordere, diese Anschauungsweise ebenso vorurtheilslos und aufmerksum zu prüfen, wie dies Webers elektrodynamischem Gesetz, oder den verschiedenen, sich durch den Raum mit Zeitaufwand fortpflanzenden elektrischen Potenzialen zu Theil geworden ist, welche zur physikalischen Konstruktion der die bebeobachteten Wechselwirkungen darstellenden mathematischen Formeln versucht worden sind.

Buch B.

Erkenntnisstheoretische Deutung des Gesetzes $-\frac{1}{r^2}$.

Nehmen wir an, dass wie hier in den Hauptzügen, so auch alle Details der Naturerscheinungen auf den gemeinsamen Wirkungsmodus $-\frac{1}{r^2}$ zurückgeführt werden können, so bleibt die Frage übrig, was diese Kraft und die ihr zugeordneten Kraftpunkte denn eigentlich seien. Ein Punkt, welcher eine Kraft ausübt, scheint unserer gewöhnlichen Vorstellungsweise eine nicht berechtigte Kombination von Begriffen; und wenn sie zugelassen wird, so bleibt die andere Frage übrig, ob dieses Gesetz $-\frac{1}{r^2}$ ein unserer Welt eigenthümliches sei, eine gemeinsame Eigenschaft aller letzten materiellen Elemente, oder ob es eine subjektive Bedeutung habe. Alle hier auftauchenden Fragen gliedern sich nach zwei wesentlich verschiedenen Ansichten, welche als letzte Erklärungsgründe der Naturerscheinungen darzustellen von Seiten der Physiker versucht wird. Es sind dies die Hypothesen der Bewegungsmittheilung durch in die Ferne wirkende Kräfte, oder aber derjenigen durch materielle Berührung resp. Stoss.

I.

Die fernewirkende Kraft.

Wenn die gegenseitigen Einwirkungen zweier Körper in einer mathematischen Formel darstellbar sind, deren quantitativer Werth von der Entfernung und nicht von der Zeit abhängig ist, so sagt man, dieselben reagiren aufeinander mit einer (instantanen) ferne-

wirkenden Kraft. Bleibt die Ursache dieser Wechselwirkung unbestimmt, so ist gegen diesen Sprachgebrauch nichts einzuwenden. Wird aber die Ursache derselben in die Körper hineinverlegt, so wird damit der todten Materie eine Eigenschaft zugesprochen, welche man sonst nur belebten Wesen zuerkennt. Mit Recht erklärte Newton eine solche Idee für absurd, sofern man unter Materie oder Körper nur das versteht, was die Mechanik als träge Masse bezeichnet. Cotes dagegen hielt diese fernewirkende Eigenschaft für etwas selbstverständliches, und Newton scheint selbst in späteren Jahren die Sache für wenigstens diskutabel gehalten zu haben. Wäre die fragliche fernewirkende Kraft eine gemeinsame für alle Materie, wie Cotes glaubte, so könnte man in ihr allenfalls in Verbindung mit der Trägheit einen Ausdruck für das Wesen der Materie finden wollen, ein Ausdruck der allerdings nicht mehr Aufklärung über die Materie giebt, wie etwa die heutzutage übel beleumundete Eigenschaft einer harmonia universalis. Aber die Physiker haben sich genöthigt gesehen, viele Arten solcher Kräfte anzunehmen und nebeneinander wirken zu lassen. Sogar Boscovich, der mit grosser logischer Schärfe ausführte, dass die räumliche Ausdehnung der Körperelemente gar nicht nothwendig sei um die Wirkungen ihrer Gruppen, der Körper, verständlich zu machen, hält sich für berechtigt, allerlei verschiedene Kräfte nebeneinander wirken zu lassen, weil eine jede noch so komplizirte mathematische Fernewirkungsformel durch eine geometrische Linie darstellbar und jede Linie eine g a n z e i n f a c h e S a c h e — seiner Meinung nach eine einfache U r s a c h e — sei.

Zu welchen Widersprüchen solche vermeintlich zulässige Annahmen führen, davon giebt uns die Geschichte der Physik viele Beispiele. Heutiger Ansicht zufolge ziehen sich ponderabele Atome an, wogegen Aetheratome sich abstossen sollen. Hieraus wäre der Logik gemäss zu folgern, dass Aether auf ponderabele Masse mit der Resultante aus ihren beiden Grundkräften wirke. Sei also das Kraftgesetz für Aether $\varphi_{,} = -\frac{1}{r^m}$, für schwere Körper $\varphi_{,,} = +\frac{1}{r^n}$, so müsste die Wechselwirkung zwischen Aether und Körpermolekel sein

$$\varphi_{,} + \varphi_{,,} = \frac{1}{r^n} - \frac{1}{r^m}.$$

Statt dessen wird für diese Wechselwirkung ein ganz anderes Kraftgesetz angenommen, abstossend oder anziehend, je nachdem es der Kalkul oder das gewünschte Resultat erfordern. Das heisst aber nichts Anderes als den Atomen teleologische Fähigkeiten zusprechen, vermittelst welcher sie den ihnen gleichartigen Stoff von dem ungleichartigen unterscheiden, und je nach dem Resultat dieser Erkenntniss verschiedentlich wirken. Sollen die fernewirkenden Kräfte auch nur den geringen vorhin angedeuteten Grad von Berechtigung in der Diskussion haben, so wäre vorerst zu zeigen, dass sie alle auf ein einheitliches Grundgesetz zurückführbar sind. Ein verzweifelter Versuch, eine solche Einheit herzustellen, ist Weber's elektrodynamisches Grundgesetz, dessen Diskussion uns die Fehler zeigen wird, vor welchen man sich bei dergleichen zu hüten hat.

Dieses sog. Gesetz sagt aus, dass die Wirkung zweier Massen aufeinander abhängig ist von der Entfernung der Massen, von ihrer absoluten Geschwindigkeit und von der Art ihrer Beschleunigung. Diese drei Abhängigkeiten lassen sich vermittelst der Zeichen $\pm$ in eine einzige mathematische Formel zusammenschreiben, und in Folge dieser Schreibfähigkeit behaupten diejenigen, welche in Weber's Formel das Grundgesetz der Materie gefunden zu haben glauben, bei Spezialfällen wie Schwere etc. würde dieses oder jenes Glied der Formel nur Null, aber das einheitliche Grundgesetz der Natur bleibe dasselbe.

Das klingt grade so, als wollte man sagen: Nicht die „Idee des Rechts“, oder „gleiches Recht für Alle“, oder „jede Sache werde nach ihrem allgemeingültigen Werthe gemäss beurtheilt“ etc., bildet das Grundgesetz der Rechtsordnung, sondern die anderthalb Millionen empirisch als zweckmässig zusammengestellter englischer Gesetze bilden die letzte Ursache des Rechts. Schreibt sie in einen Satz zusammen und setzt alle weniger das eine, dem vorliegenden Spezialfall entsprechende, gleich Null, dann habt ihr die Bedeutung der Grundursache für euren Spezialfall. Dazu würde sich ein solches Grundgesetz noch mit jeder Stunde, welche neue Bedürfnisse entdeckt, zu ändern haben.

In der gegenwärtigen Zeit, wo die Reaktion gegen eine nichtssagende anspruchsvolle sogenannte Naturphilosophie noch andauert,

sind zwar viele Physiker geneigt, alles für empirisch zufällig zu halten und hat deshalb Weber's Formel, obschon im Widerspruch mit den Grundsätzen der Mechanik, nach welchen die Wirksamkeit einer Kraft nicht von der vorhandenen Bewegung, die Wirkung eines Massenmomentes nicht von der Art und Weise seiner Erzeugung abhängen kann, Anhänger gefunden.

Dieses Ausserachtlassen der logischen Gesetze, denen zufolge Bewegung ein relativer Begriff ist, weshalb von einer absoluten Bewegung und einer Art der Beschleunigung gar keine Rede sein kann, verursachte, dass man auch die logische Bedeutung einer aus Einzelgliedern zusammengesetzten mathematischen Gleichung gar nicht weiter untersuchte, sondern annahm, ebenso wie in einer algebraischen Gleichung Einzelglieder Null werden könnten, unbeschadet der algebraischen Allgemeinheit des Ausdrucks, ebenso könnten auch in jedem physikalischen Gesetze von mehreren Bestimmungen einzelne verschwinden.

Man hat geglaubt, weil die Grundsätze der Mechanik durch Beobachtungen den Menschen zum Bewusstsein gekommen, weil sie auf empirische Weise erlernt worden, deshalb könnten sie auch aus keiner anderen Quelle als richtig und allgemein gültig nachgewiesen werden. Wenn dem so wäre, dann wäre es verlorene Mühe, nach einem Grundgesetz zu suchen, ja es existirte dann überhaupt kein Gesetz, weder im Allgemeinen noch im Einzelnen.

II.

Wirkung durch Stoss.

Das vorhin gekennzeichnete gespensterartige Wesen einer fernewirkenden Kraft, und die Willkürlichkeit, womit jeder Rechner eine seinen Formeln zusagende Art solcher Kräfte erfand, hat einestheils naivere, andrestheils aber auch strenger denkende Forscher bewogen, jenen Kraftbegriff ganz aufzugeben und zu versuchen, ob sich jede Bewegung auf Uebertragung eines Massenmomentes durch Berührung und Stoss zurückführen lasse. Dass ein jeder

Stoss bei der Berührung Bewegung ertheile, hielt man dabei für selbstverständlich. Diese Selbstverständlichkeit ist aber ebensowenig begründet, wie diejenige einer in die Ferne wirkenden Materie. Vorab ergiebt uns nur die Erfahrung, dass ein gestossener und dabei, wie wir glauben, berührter Körper sich in Richtung des Stosses fortbewegt. Was wir aber bei realen Körpern als zutreffend beobachten, dürfen wir deshalb noch nicht den Körperelementen gleicherweise zuschreiben, von denen wir doch zugeben müssen, dass sie in ihrer Isolirtheit ganz andere Eigenschaften haben wie in ihrer Gesammtheit als Körper. Zudem hat aber auch die genauere Beobachtung ergeben, dass viele und vielleicht alle Körper beim Stosse sich nicht an ihren Oberflächen berühren, sondern nur bis zu einer sehr kleinen Distanz einander nähern; dass also die Körper nicht durch Berührung, sondern bei einer gewissen sehr kleinen Distanz wirklich aus der Ferne aufeinander wirken.

Die Stossphysiker haben nun vermeint ein logisches Prinzip für ihre Ansicht anrufen zu können, zufolge dessen für das Atom gelten müsse, was vielleicht für die Körper nicht immer zutreffe, oder wegen unserer mangelhaften Beobachtungsmethoden nicht als zutreffend erkannt werde. Dieses vermeintlich logische Prinzip sollte heissen: Dort, wo schon Etwas sei, könne kein Anderes Etwas eindringen; folglich müsse eine Masse der anderen bei der Bewegung ausweichen. Der Vordersatz dieser Behauptung ist aber unbestimmt, und deshalb kann der Nachsatz ebensogut falsch wie richtig sein. Das allgemeine Etwas muss eindeutig bestimmt werden, sonst lässt sich alles mögliche Verschiedene aus dem Satze ableiten.

An demselben Orte des Raumes kann allerdings nur ein Punkt, eine Linie, eine Fläche, ein Volum sein, weil eben nur ein Raum da und sich selbst gleich ist, wie man zu sagen pflegt. Aber an demselben Orte, in derselben Fläche oder räumlichem Volum können zugleich rothe und grüne Lichtwellen sein; an demselben Orte kann zugleich ein hartes und ein schweres Etwas sein. Es kommt also darauf an, ob die Materie ein solches Etwas ist, welches den Raum ausfüllt und sich nie verändert, dessen Veränderung sogar ebensowenig denkbar ist, wie diejenige des Raumes, der Ausdehnung überhaupt. Hier sehen wir aber gleich, dass die Begriffe Materie

oder Masse in keiner Hinsicht diesen Bedingungen genügen; dass sie weder nothwendigerweise einen Raum ausfüllen, obschon dies häufig behauptet wird, noch dass sie unveränderlich sind; dass sie im Gegentheil verschiedenartig gedacht werden können.

Weder die Mathematik noch die Logik findet eine Schwierigkeit darin, Materien von dichterer oder dünnerer Masse zu denken, ein Volum von Dichte 1 mit einem andern zu einem Volum von Dichte 2 zu verschmelzen, also die eine Masse an den Ort der anderen eindringen zu lassen; und ebensowenig ist der Massenkoeffizient eines Körpers an eine Ausdehnung überhaupt gebunden, sondern kann lediglich dem Orte seines Schwerpunktes zugeschrieben werden.

Wenn wir also von ausgedehnten absolut harten Atomen, von einer gewissen spezifischen Masse sprechen und behaupten, dass diese beim Stosse einander ausweichen müssen, so haben wir nicht Folgerungen aus einem logischen Prinzip gemacht, sondern aus einer Hypothese über die Eigenschaften der Körperelemente, deren Wahrheit oder Möglichkeit überhaupt erst bewiesen werden muss. Etwas absolut Hartes, Undurchdringliches existirt in unserer Beobachtung nicht. Die Logik gewährleistet durchaus nicht, dass die hypothetischen Atome diese Eigenschaft besitzen. Aber geben wir diese Möglichkeit zu, so werden wir sehen, dass eine aus solchen Elementen konstruirte Welt nicht lange leben kann.

Absolut harte Atome könnten sich nur nach dem Gesetze des sogenannten unelastischen Stosses bewegen, und damit wäre das Prinzip von der Erhaltung der Kraft aufgegeben, ohne welches kein Schritt in der Naturerklärung gemacht werden kann. Unelastische Atome würden allmählich zu einem Haufen ohne Bewegung sich ansammeln.

Man hat zwar häufig bei den hier vorkommenden Rechnungen das seiner Gestalt nach unveränderliche Atom mit dem Gesetz von Erhaltung der Kraft zusammengebracht, ohne zu bedenken, dass man dadurch das Atom zu einem elastischen macht; also durch eine Hinterthür die Eigenschaft wieder einführt, welche man dem Atome vorhin abgesprochen hatte. Denn ist das Atom elastisch, so muss es seine Gestalt verändern können, aus räumlich getrennten Theilen bestehen. Diese Theile können aber ihre Gesammtstruktur

nur verändern, wenn sie mit gewissen Kräften, deren Betrag mit der Entfernung sich ändert, aufeinander wirken.

Hiermit sind wir bei den verschmähten fernewirkenden Kräften als letzten Ursachen wieder angelangt. Als Resultat ergiebt sich: Stoss und Fernewirkung haben gleichviel Unbegreifliches, und durchaus nichts Selbstverständliches. Bei der mathematischen Behandlung der Phänomene ist es aber stets nothwendig fernewirkende Kräfte anzunehmen, werde dies nun offen zugestanden, oder durch den Körperelementen beigelegte Eigenschaften, oder durch nicht motivirte Kombination von Formeln, die inhaltlich dasselbe apodiktisch fordern, ausgeführt.

III.

Erklären, Begreifen.

Der Sitz des Uebels, welcher alle die in I und II auftretenden Schwierigkeiten verursacht, ist aus dem Gange der Untersuchung und dem letzten Resultate erkenntlich. Kurz gesagt, es ist die Dunkelheit oder wenigstens Unbestimmtheit einiger Begriffe, welche der Gemeinsprache sehr geläufig sind, für die wissenschaftliche Sprache aber eine tiefer gehende Untersuchung fordern. Vorzugsweise sind es die Begriffe „Masse, Kraft, Undurchdringlichkeit oder Härte und Elastizität“, welchen wir unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden haben. Vermögen wir es, dieselben ebenso eindeutig zu definiren wie „Zahl und Ausdehnung“, so werden die physikalischen Erklärungen auch ebenso richtig wie die mathematischen Beweise.

Es ist nicht etwa die Zeichensprache der Mathematik oder eine allen anderen Verstandesoperationen an Untrüglichkeit überlegene Kraft der analytischen Operationen, sondern einzig und allein die eindeutige Bestimmtheit der in dieser Wissenschaft zur Verwendung kommenden Begriffe, welche die Sicherheit ihrer Resultate hervorbringt. Bleibt einmal einer ihrer Begriffe zweideutig, wie in neuerer Zeit die „gerade Linie oder Richtung“,

an welcher infolge mangelhafter Definition die Hypergeometer zugleich Geradheit und eine gewisse Krummheit entdeckt haben wollten, so werden Resultate herausgerechnet, die ebenso phantastisch und falsch sind, wie diejenigen der mystischen Naturphilosophie.

Diese letzte Ursache mathematischer Sicherheit ist allerdings häufig verkannt worden. Man hat sie in der Zeichensprache und dem Operationsmodus suchen wollen und deshalb geglaubt, in der Aufstellung eines der mathematischen Technik nachgebildeten Algorithmus (Logikkalkul) eine Hülfe für die Untrüglichkeit logischer und allgemein philosophischer Schlüsse bilden zu wollen. Dabei wurde ganz verkannt, dass jedweder mathematische Algorithmus seine Berechtigung erst in der Logik suchen und finden kann; woher es dann auch erklärlich, dass diese ganze algebraische Logik nie zu einem Resultate gelangt, welches nicht auch schon ohne jeden algorithmischen Ballast fest stünde. Um hier keine Unklarheit übrig zu lassen, müssen wir die Aufgabe und den Zweck allen Begreifens und Erklärens erörtern.

Die gewöhnliche Definition des Erklärens lautet: „Zurückführen des Unbekannten auf besser Bekanntes". Diese Definition ist nicht hinreichend; sie muss lauten: „Zurückführen des Unbekannten auf absolut Bekanntes", die vollständige Erklärung wenigstens erfordert dies. Was ist uns nun absolut bekannt? Das sind unsere Empfindungen. Der Eindruck, welchen ein Objekt auf uns macht, sei es „grün, hart, sauer etc.", ist uns unmittelbar bekannt, ganz einerlei, was die Ursache dieser Empfindung sein möge, einerlei, ob wir uns eine richtige oder falsche Vorstellung von jenem Dinge machen; und ebenso irrelevant für die Empfindung als etwas absolut Bekanntes ist es, ob der eine die Farbe für roth hält, die dem andern für blau gilt. Für den ersten ist das Rothe ebenso wahrhaftig die bewusst gewordene Empfindung wie für den andern das Blaue; jeder weiss, was er empfindet.

Unsere Empfindungen sind also die empirischen unmittelbar und absolut uns bekannten Elemente aller unserer Erklärungen oder Vorstellungen von den Dingen. Solange diese Empfindungen aber vereinzelt bleiben, nur existiren so lange sie objektiv erregt werden, kann nie die Vorstellung von etwas Anderem; d. h. den Dingen, in uns entstehen. Damit dies möglich werde, müssen wir

viele dieser Einzelempfindungen zu einem Ganzen vereinigen, d. h. der Verstand, eine gewisse Fähigkeit oder Thätigkeit des vorstellenden Wesens, muss die Synthese dieser Einzelempfindungen vollbringen. Diese Synthese muss aber eine allgemein gültige, nur nach einem einzigen Modus ausübbare sein, sonst wäre eben keine Synthese möglich. Könnte der eine sagen: nach meiner Verstandesthätigkeit ist $1 + 1 = 2$, der andere: nach meiner ist $1 + 1 = 3$, so wäre „Verstehen, Begreifen, Erklären" eben unmöglich; der eine könnte den anderen höchstens für einen Narren erklären.

Dies Grundgesetz der logischen Synthese, das Gesetz des Widerspruchs, das Axiom, grün könne nicht zugleich weiss und blau, 1 könne nicht auch 2 und 3 sein, ist also unabhängig von der spezifischen Art unserer Empfindungen, und darf in diesem Sinne ein apriorisches Gesetz aller Logik genannt werden. Das ist allerdings ein himmelweiter Unterschied von den sog. angeborenen Ideen. Es dauert im Gegentheil oft sehr lange, ehe wir uns bewusst werden, dass in einer anderen Weise eine Synthese gar nicht möglich, dass auf eine andere Art ein gegenseitiges Verständniss über das, was „grün und blau, gerade und krumm etc." sei, gar nicht ausführbar ist. Manche Schriftsteller, die verstanden, Schwächen Anderer aufzudecken, fehlende Glieder eines Beweises zu entdecken, Antithesen, Paradoxien in Schlagwörtern aufzustellen, Fragen und Räthsel zu geben, gefällig zu schreiben, und ob dieser Fertigkeiten von einer gewissen Zeitströmung Philosophen genannt wurden, haben nie verstanden eine entscheidende Antwort auf ihre wohlfeil herzustellenden Fragen zu geben, weil sie nie zur Erkenntniss vorzudringen vermochten, dass, sollte ihr Wortefeuerwerk irgend welchen bleibenden Werth haben, es auch eine allgemeingültige logische Synthese geben müsse. Aus diesem apriorischen Gesetz entwickelt nun die Mathematik durch Aufstellung aller möglichen Kombinationen ihr ganzes Gebäude. Alle ihre Gebilde haben deshalb nur formale Bedeutung und sind eindeutig bestimmt, absolut genannt und bekannt, weil sie nach dem logischen Gesetz in ihr Grundelement, den Denkakt, aufgelöst, oder umgekehrt, aus einer Vielheit von Denkakten synthetisch konstruirt werden können.

Die Namen, welche wir den Empfindungen geben, nenne ich Empfindungsbegriffe; ihr Ursprung und ihre Bedeutung ist rein empirischer Natur. Die Namen, welche wir den Kombinationen oder Gebilden der Mathematik geben, sind demnach Formbegriffe, ihrem Ursprung und Wesen nach für jede Empirie, eine jede thatsächliche Wahrnehmung gültig, weil sie eben das Thatsächliche nicht verändern, sondern dessen Vielheit in übersichtliche Form zusammenfassen. In diesem Sinne seien sie apriorische Begriffe genannt.

Alle Beschreibung und Erklärung eines Dinges oder Vorgangs muss nun in Begriffen, d. h. in diesen zwei Arten von Begriffen, geschehen. Denn andere Begriffe giebt es nicht, weil es für uns kein anderes Gebiet des Daseins giebt, als Empfinden und Denken. Empfinden hier in dem weitesten Sinne, einschliesslich aller Allgemein- und Willensgefühle zu verstehen, als irgend ein Vorgang, dessen wir uns innerlich (unmittelbar) bewusst werden; stamme er irgendwo her, oder werde er durch uns selbst hervorgerufen.

Wenn das obige geleistet, dann bleibt keine Frage mehr übrig, als etwa warum denn $1 = 1$ oder $1 + 1 = 2$; eine Frage, die allerdings auch schon gemacht worden ist, deshalb aber doch noch nicht von verständigen Menschen wiederholt zu werden braucht.

Ist es uns dann möglich, eine vollständige Beschreibung eines Dinges zu geben, zu zeigen, welche Empfindungen es erregt, also zu welchen Empfindungsbegriffen es Veranlassung giebt und in welcher Form, d. h. nach welchen Formbegriffen wir diese Empfindungsbegriffe kombiniren müssen, damit das Ganze die genaue Beschreibung des Dinges liefert, dann können wir behaupten das Ding erklärt zu haben; weil wir es in lauter uns unmittelbar bekannte Elemente zerlegt haben, aus welchen Elementen wir wiederum nach der durch die Formbegriffe vorgeschriebenen Kombination den Begriff des ganzen Dinges aufbauen können (ME.).[1])

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass hier das Wort „Begriffe“ in einem eindeutig bestimmten Sinne gebraucht wird,

---

[1]) Enthält die ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes, so wie den Nachweis, dass alle mathematischen Gebilde und Operationen aus dem einheitlichen Denkakt, welcher identisch ist mit dem Axiom logischer Synthese, durch weiter nichts als Wiederholungen dieser Synthese aufgebaut sind.

was gewöhnlich nicht geschieht. Hegel gebraucht das Wort in wenigstens vier verschiedenen Bedeutungen, und rühren daher zum grossen Theile die Unklarheiten und Fehler seiner abstrakten Philosophie.[1])

Physikalische Erklärung.

Sehen wir hiernach, was die physikalische Erklärung leisten soll.

Unsere Erfahrungen oder Beobachtungen der Natur lassen uns keine Kräfte wahrnehmen, sondern Dinge und Veränderungen der Dinge; oder nach dem Vorigen: wir werden uns verschiedener Empfindungen bewusst, und kombiniren diese Vielheit von unmittelbar bekannten Eindrücken nach logischer Synthese zu einem Ganzen, das wir Ding nennen. Die Existenz von Kräften hängt ab von der Gültigkeit unserer Schlüsse von den Veränderungen dieser Dinge auf hypothetische Ursachen, welche diese Veränderungen bewirkt haben sollen.

Lieferte uns die Natur nur eine Vielheit von konstanten Empfindungen, so würden wir vielleicht sagen: „wir haben die Wahrnehmungen von Dingen", aber wir würden nicht von Kräften, von Ursachen und Wirkungen sprechen, eben weil keine Veränderungen stattfänden. Finden aber Veränderungen statt, so kann, wie vorhin die Erklärung eines Dinges, die Erklärung der Veränderung nur fordern, dass man alle Elemente nach Begriffen von unmittelbar bekannter Bedeutung bestimmt, die sich verändernden Dinge aufzeige, und den logischen Zusammenhang dieser Elemente innerhalb der zeitlich verlaufenden Veränderung nachweise. Die Forderung einer physikalischen Erklärung setzt also als Axiom voraus, dass, ebenso wie ein funktionaler Zusammenhang in jedem mathematischen Gebilde, einer nach Zahl und Ausdehnung bestimmten Einheit von vielen Einzelsetzungen (Einer oder Punkte) so auch in jedem nach Zeit und Raum geordneten Gebilde (Vorgang, Veränderung) ein funktionaler Zusammenhang existire. Die Glieder dieser letzteren Gebilde haben also ausser dem funktionalen Zusammenhang der abstrakten Mathematik noch einen solchen, welcher die Ordnung

---

[1]) Vergleiche hierzu die Definitionen von „Wahrnehmung, Vorstellung, Begriff" in C. II dieser Schrift.

der Elemente nach der Zeit fordert, wobei demnach ein früher und später unterschieden wird.

Aus Gründen, welche hier nicht weiter zu erwähnen sind (ME. 101.), nennt die Gemeinsprache dieses früher und später „Ursache und Wirkung“, und den funktionalen Zusammenhang überhaupt „Abhängigkeit nach dem Kausalitätsgesetz“. Jeder Versuch einer Naturerklärung setzt also als Axiom voraus, dass die Naturerscheinungen von einander abhängig sind. Die Veränderungen werden demnach als Wirkungen betrachtet, welchen Ursachen zugeordnet sind. Diese Ursachen müssen nach logischem Gesetze konstant sein; denn könnten sie in letzter Instanz auch variabel sein, so wäre eben keine eindeutige logische Synthese der Veränderungen, keine Erklärung möglich.

Empiristische Skeptiker haben es zwar fertig gebracht, die Allgemeingültigkeit der Kausalität, die Konstanz letzter Ursachen in Zweifel zu ziehen. Dieselben müssten dann aber auch, um konsequent zu sein, aufhören von Erklärung und Erklärbarkeit überhaupt zu sprechen; eigentlich überhaupt aufhören zu sprechen, denn die Möglichkeit eines Verständnisses durch die Sprache oder irgendwelche Gebärden setzt die Konstanz des Kausalitätsgesetzes, und die Konstanz der Bedeutung solcher Gebärden voraus.

Unter den Naturerscheinungen lassen sich nun bald solche von grosser Konstanz unterscheiden von anderen, welche selbst der gröbsten Beobachtung sich als in beständiger Veränderung begriffen kund geben. Wir nennen jene konstanten Erscheinungen Dinge, und verlegen dieser Konstanz halber die Ursache der sich rasch verändernden Erscheinungen, wie etwa Blitz, Donner, Wind etc., genannt Naturprozesse, in diese Dinge; sagen: die Dinge wirken mit einer gewissen Kraft aufeinander, und bewirken dadurch jene Vorgänge oder veränderlichen Erscheinungen der Dinge. Dieses Kausalitätsgesetz oder kausale Verbindung der Wahrnehmungen wenden wir beständig an, ebenso wie den Satz des Widerspruchs — mit welchem Satze die Kausalität inhaltlich identisch ist (ME. 51.) — nicht weil uns diese Lehre schon vor der Geburt eingeimpft worden, wir mit einer sogenannten angeborenen Idee auf die Welt gekommen wären, sondern weil es ganz unmöglich ist, mit Anwendung eines anderen kombinatorischen Modus die

Vielheit der Erfahrungen zu einem eindeutig bestimmten Ganzen zusammenzufassen, d. h. irgend etwas begreifen (umfassen) und erklären zu können.

Die von aller Erfahrung unabhängige Geltung dieser logischen Gesetze negiren oder auch nur in Zweifel ziehen wollen, ist gleich mit der Behauptung: keine Erscheinung steht mit der anderen in irgendwelcher Verbindung, über keine können wir etwas aussagen, denn schwarz ist möglicherweise weiss, eins gleich zwei — und folglich können wir auch von irgendwelcher Behauptung nichts behaupten; daher ist unsere Behauptung, dass die logischen Gesetze möglicherweise anders sein könnten, sinnlos, vulgo Unsinn, und jeder, der nur ein Wort spricht, um etwas zu sagen, beweisst damit, dass er ein Narr ist. Aber wer kein Narr ist, der ist erst recht ein Narr.[1])

Die genauere Beobachtung hat nun gezeigt, dass schon die Wahrnehmungen unserer auf enge Grenzen beschränkten Sinne kaum ein konstantes Ding aufzuweisen vermögen. Weitere Schlüsse der Physik ergeben, dass überhaupt jenseits der Grenzen unserer Sinne kein konstantes Ding existiren kann. Die kausale Verbindung fordert aber ein solches konstantes Ding, weil die Ursache und demzufolge der gemuthmaasste Träger der Ursache ein konstantes Etwas sein muss. Da nun diese konstanten Dinge empirisch nicht aufzufinden sind, so müssen sie ideell gesetzt werden, und damit ist das konstante Atom als letzte Ursache der Dinge und der Veränderungen der Dinge fertig.

Um physikalisch zu erklären, muss also die ganze Welt in absolut einfache Elemente aufgelöst werden, und alle Veränderungen der Welt können deshalb nur in Veränderung der gegenseitigen Lagen dieser Atome bestehen. Eine jede physikalische Erklärung muss demnach auf einen mechanischen Bewegungsvorgang zurückführbar sein, und wenn von einer Kraft dieser Atome gesprochen wird, so heisst das in mathematischem Sinne weiter nichts als: alle Veränderungen stehen in Abhängigkeit voneinander, und die-

---

[1]) Die wunderbare Entdeckung unserer letzten Jahrzehnte, dass alles empirisch, und folglich auch die Logik eine empirische Wissenschaft sei, welche bei vielen Verehrern der sog. exakten Wissenschaften Anklang gefunden hat, möge diese Sätze entschuldigen.

selben lassen sich genau beschreiben, ihre gegenseitige Lage für eine vergangene oder zukünftige Zeit berechnen, wenn wir sie in einer von Raum und Zeit abhängigen mathematischen Funktion zusammenfassen können. Der frühere Zustand dieser Funktion verhält sich dann zum späteren wie die Ursache (der Gemeinsprache) zur Wirkung; die zeitliche Ordnung-Folge in der mathematischen Formel ist gleich der physikalisch-philosophischen Kausalität. Diese Kraft der Atome hat also vorab nur eine ideelle Existenz, ebenso wie das empirisch nicht aufzeigbare noch irgendwie empfindbare Atom; beides sind nicht Empfindungsbegriffe für empirisch gewonnene Thatsachen, sondern vorab Formbegriffe, von dem Verstande gebildet, um die kausale Verbindung der Naturerscheinungen ausführen zu können; ob denselben eine Bedeutung als reale Existenz zugesprochen werden darf, kann in diesem Stadium der Untersuchung noch nicht entschieden werden.

Eine sehr grosse Verwirrung ist sowohl in Physik wie Philosophie dadurch angerichtet worden, dass man den eben erläuterten mathematischen Funktionalbegriff, die Kraft der Atome, für gleichartig oder gar identisch mit den empirisch beobachteten Kräften der Natur hielt; dass man geglaubt hat, jenen Formbegriff der reinen Mechanik, die Kraft, als einen Allgemeinbegriff benutzen zu dürfen, der verschiedene Abarten zulasse, wie Katzen und Hunde als Arten der Raubthiere. Man spricht von Druckkraft, Zug-, Zentrifugal-, Zentripetal-, Stoss-, Trägheits-, lebendiger-, todter-, Spannungs-, Bewegungs-, momentaner-, kontinuirlicher-, Berührungs-, fernewirkender- etc. Kraft, Sachen die das möglichst Verschiedenartige bedeuten und nur das gemeinsam haben, dass in ihnen allen jener Formbegriff eine gewisse aber sehr verschiedenartige Rolle spielt. In der Gemeinsprache ist dieser vage Gebrauch des Wortes Kraft erlaubt, weil er von der Muskelkraft als unmittelbar uns bekannter Ursache einer Bewegung abgeleitet ist. Ebenso mag der experimentirende und in der Gemeinsprache sprechende Physiker von einer Kraft sprechen, mit welcher der Luftballon zur Höhe gezogen, oder in die Höhe gedrückt wird; von Kräften, welche Wasser- und Lichtwellen in Bewegung setzen, von Molekeln, welche in dieser Entfernung mit abstossenden, in jener mit anziehenden Kräften wirken etc. Denn der Zweck solcher Beschreibung ist mit

möglichst sinnlichen Bildern die Wechselwirkung zwischen Körpern vor Augen zu führen. Der Mathematiker jedoch, welcher auf die letzten hypothetischen Ursachen der Bewegung zurückgeht, muss sich von diesem vagen Wortgebrauche emanzipiren, und stets nur von einer bestimmten mathematischen Funktion sprechen, welche die kausale Verbindung zwischen den Elementen dieses oder jenes Vorgangs herstellt. Der Gemeinsprache ist die Kraft „Ursache der Bewegung überhaupt", und insofern der allgemein eGebrauch gerechtfertigt. Der Mathematiker muss aber bedenken, dass die Bewegung, speziell die gleichförmige Bewegung, gar keine Ursache zu haben braucht, und dass im Gegentheil der Ruhe möglicherweise eine Ursache zugeschrieben werden muss. Viel richtiger ist deshalb von einigen Schriftstellern die mathematische Kraft definirt worden als „Ursache der veränderten Bewegung". Aber auch diese Definition ist noch nicht zulänglich, um die wesentliche Verschiedenheit der hier möglichen Ursachen zu kennzeichnen.

Das Wort Kraft ist demnach im Allgemeingebrauche ebenso unbestimmt wie das Wort Körper. Die üblichen Naturkräfte geben keine letzten Erklärungen, sondern bedürfen selbst einer solchen, wenn sie nicht die Rolle geheimnissvoll in die Ferne wirkender Gespenster spielen sollen. Ebensogut wie die reine Mechanik nicht bei dem Wort Körper stehen geblieben ist, sondern diesen in die Formbegriffe „Volum und Masse" zerlegen musste um ihre Aufgabe zu lösen, muss sie dies auch für die Kräfte thun.

Es handelt sich also darum, die obengenannten Kräfte der Mechanik und der Physik genau zu definiren — was durch Betrachtung der Wechselwirkungen, d. h. durch ihr Aequivalent von Massenbewegung in bestimmter Zeit ausgeführt worden ist — und dann diese verschiedenen Kräfte auf das eindeutige rein logische Gesetz der kausalen Verbindung zurückzuführen. Wenn dies überhaupt möglich, dann dürfte man von einer gemeinsamen Urkraft der Natur sprechen. Um jedoch keine Verwirrung in dem gemeinsprachlichen Gebrauche des Wortes Kraft anzurichten, soll dieser Urkraft ein anderer Name gegeben werden.

IV.

Die arithmetische Form des physikalischen Kausalbegriffs.

Wenden wir diese Erörterungen auf unsere Aufgabe an, so stellt sich die Frage:

1) können wir die kausale Verbindung der in absolut einfache Elemente aufgelösten Welt in bestimmten mathematischen Funktionen darstellen? und speziell:
2) ist eine kausale Verbindung dieser Elemente überhaupt, — also eine Verbindung, welche aus einem beliebigen Zustande der Welt (räumlicher Lagerung der Elemente) einen späteren nothwendig dem früheren folgenden (oder umgekehrt) berechnen lässt, — nur durch eine einzige mathematische Funktion möglich, oder können verschiedene das Gleiche leisten?

Jenachdem die Antwort auf diese Frage ausfällt, ist jene sogenannte Urkraft der Atome im ersten Falle ein logisches, im zweiten ein empirisches Gesetz der Welt.

Das Element darf keine Ausdehnung haben.

Das absolut einfache Element ist ein solches, an welchem sich in keiner Hinsicht Verschiedenheiten, Theile, aufzeigen lassen. Geometrisch muss dasselbe also ein Punkt sein. Diejenigen, welche sich punktuelle Atome nicht vorstellen können, müssen bedenken, dass es sich bei unserem absoluten Element gar nicht darum handelt, ob dieselben eine greifbare, sehbare oder sonstwie sogenannte reelle Existenz haben wie die Körper, sondern ob sie als Ausgangspunkte der mathematischen Betrachtung dienen können. Die Mathematik macht ihre Begriffe selbst, weil sie eben nur mit Formbegriffen operirt; sie kehrt sich nicht daran, ob eine ebene Fläche, eine gerade Linie, ein genauer Kreis, in der Natur überhaupt existiren. Eben weil sie mit ideellen Elementen operirt, deren

Begriffbildung zwar durch die Erfahrung veranlasst wurde, gerade wie jede Verstandesthätigkeit, jede logische Synthese erst durch die empirische Thatsache eines lebenden Wesens, aber durchaus nicht einer speziellen Thatsache, oder Summe solcher, nachkopirt wird, ebendesshalb können ihre Resultate absolut genau sein, und ihre Formbegriffe so gebildet werden, dass sie als nirgendwo in der Natur, sondern nur in der logischen Forderung vorhandene Normen (Normalmaasstäbe) für die unzähligen Variationen der empirischen Data verwerthbar sind. Die Mathematik kann Masse, einen Koeffizienten der Wirksamkeit, ebensogut einem Punkte wie einem Volum zuschreiben; sie muss aber auf einen Punkt zurückgehen, wenn sie die Richtungen der Wirksamkeit feststellen soll, denn von einer Richtung zwischen zwei ausgedehnten Körpern spricht kein Geometer, sondern nur von einer solchen zwischen Punkten.

Die Mathematik ist deshalb nicht nur befugt ein punktuelles Element anzunehmen, sondern muss dies thun, weil sie keinem ausgedehnten Atom eine einheitliche Wirksamkeit zuschreiben darf, ohne mit dem Gesetz des Widerspruchs in Konflikt zu gerathen. Selbst das Kugelatom, dessen Gebrauch für spezielle Fälle in Kap. A. II als zulässig galt, hat eine andere Wirksamkeit für innere wie für äussere Orte, genügt also nicht der Bedingung absoluter Einfachheit als mathematischen Ausgangspunktes der Bestimmungen.

Wenn man, wie gewöhnlich geschieht um diesen prinzipiellen Fehler des ausgedehnten Atoms zu verdecken, demselben die neue Eigenschaft der Undurchdringlichkeit zuspricht, so zeigt dies am deutlichsten, dass ein solches Element nicht einfach ist. Diese Undurchdringlichkeit wäre identisch mit einer Unzahl höchst kurioser logisch absurder Kräfte, deren Wirksamkeit überall Null, und nur an einem Punkte ∞ wäre. Es klingt allerdings besser, wenn man ein solches Monstrum kausaler Bestimmungsweise durch das glatte Wort „Oberflächenkraft" ersetzt.

Will man selbst solche Kräfte für zulässig gelten lassen, so ist damit doch noch nicht die mysteriöse Materie erklärt. Denn jedem beliebigen Punkte dieser Materie die Kraft Null bei jeder Entfernung, und eine unendlich grosse Kraft am Punkte selbst

zuschreiben, erklärt noch nicht, wie denn alle diese Massenpunkte in der Gestalt des Atoms zusammenhängen. Jene Punkte könnten ebensogut auseinanderfallen und jeder für sich die dem Massenpunkt zugeschriebene Kraft behalten. Es müssen also wieder neue Kräfte vorausgesetzt werden, welche die Massenpunkte zusammenhalten, welche also etwa mit $\varphi = \infty$ bis auf jede Distanz im Atome wirken, aber kein Haar weiter. Man sieht doch wohl, dass diese undurchdringliche Materie eine mystisch metaphysische Idee ist, die in keine mathematische Behandlung hineingehört. Will man also mathematische Beschreibungen ausführen, so muss man das ausgedehnte Element bei Seite lassen. Der Begriff entstand, indem man glaubte die Körpereigenschaften beibehalten zu können und dieselben dadurch zu erklären, dass man sie in kleinere Bestandtheile des Körpers hineinverlegte; also der alte Fehler, eine Eigenschaft durch diese selbige Eigenschaft erklären zu wollen.

Während also das ausgedehnte Atom selbst wieder erklärt werden, oder aber seine Berechtigung in einer mystischen Naturphilosophie suchen müsste, leistet das ideell gesetzte Punktelement alle von ihm geforderten Dienste, d. h. die Möglichkeit, Körper von irgend welcher Gestalt, Masse und Wirkungsart nach mathematischen Bestimmungen, eindeutigen Formbegriffen, zu beschreiben.

Wechselwirkung zweier Elemente.

Wie ausgeführt, beobachten wir direkt nur Veränderungen; alles Andere ist Folgerung aus solchen Veränderungen. Betrachten wir die einfachst mögliche Veränderung, diejenige, welche stattfinden kann zwischen zwei Punktelementen. Alles was bei solchen veränderlich, ist ihre Entfernung; denn sie selbst sind unveränderlich der Konstanzdefinition zufolge. Es giebt in diesem Systeme weiter nichts als die beiden Punktelemente a und b und ihre Entfernung r. Von Richtungen kann erst die Rede sein, wenn mehr als zwei Elemente da sind; solange das System auf a, b beshränkt bleibt, ist nur Distanz, keine Richtung dieser Distanz vorhanden.

Wenn nun a, b zu den Zeiten t, $t_{,,}$ $t_{,,,}$.. die Entfernungen r, $r_{,,}$ $r_{,,,}$.. haben, so sind die Verhältnisse $\frac{r_{,}}{r_{,,}}$ $\frac{r_{,}}{r_{,,,}}$ ein Maass der Veränderung, welche das System erlitten hat. Setzen wir

daher r als veränderliche Grösse, d. h. als Symbol der veränderlichen Entfernung überhaupt, und 1 als Distanzeinheit, so ist $\frac{1}{r}$ der arithmetische Allgemeinausdruck für alle Veränderungen des Systems. Fragen wir jetzt:

> Welches ist das Gesetz, nach welchem die gegenseitige Bewegung der beiden Punkte a, b stattfinden muss, damit $\frac{1}{r}$ der allgemeingültige Ausdruck der Veränderung, des Maasses der Veränderung, welche in dem System vorgegangen ist, sein könne?

So ist die Antwort:

> das durch die derivirte Funktion von $\frac{1}{r}$ also durch $-\frac{1}{r^2}$ dargestellte Gesetz.

Wird nämlich eine primäre Funktion auf eine Ausdehnungsgrösse gedeutet, so ist ihre Derivirte der arithmetische Ausdruck eines Bildungsgesetzes, welches auf ein bestimmtes Gebiet angewendet — über ein Gebiet erstreckt, nach dem Ausdruck der Integralrechnung — jene Ausdehnung erzeugt. Wird die primäre Function auf eine Wirkungsgrösse — Leistung, Arbeit, im Sinne der Mechanik — gedeutet, so ist gleicherweise ihre Derivirte arithmetischer Ausdruck des Bildungsgesetzes, welches über ein der Zeit und dem Raume nach bestimmtes Gebiet wirkend (erstreckt) jene Arbeit erzeugt. Für die ausführliche Begründung dieses Satzes siehe ME. 246 u. ff. Entwickelung des Infinitesimalkalkuls.

Die vorhin gegebene Antwort ist eindeutig, denn keine andere Funktion als $-\frac{1}{r^2}$ kann $\frac{1}{r}$ zum Integral haben. Geben wir diesen rein mathematischen Bezeichnungen eine Deutung in mechanischen Begriffen, so sagen wir:

Das Bedürfniss kausaler Verbindung der Erscheinungen fordert von uns, die wahrgenommenen Veränderungen als Wirkungen von Ursachen zu betrachten. Die Ursache der obigen Wirkung $\frac{1}{r}$ muss in die beiden Punkte a, b verlegt werden, weil es ja nichts anderes Konstantes in jenem Systeme giebt. Das Gesetz, nach

welchem jene Ursache wirkt, ist gegeben durch $-\frac{1}{r^2}$. Wir sagen demnach, jene Punkte wirken aufeinander mit einer Ursache (Kraft), welche abnimmt umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung. Das Kausalgesetz erscheint also in der Maske einer fernewirkenden Kraft. Ein jedes andere hiervon verschiedene Gesetz $\pm\frac{1}{r^n}$ wäre aber nicht das Kausalgesetz, sondern die Hypothese einer unerklärlicher Weise in die Ferne wirkenden todten Masse.

Nochmals sei aber wiederholt, dass dies nur für die hier besprochene auf Punkte bezogene wirkende Ursache (vulgo Kraft) gilt. Aus Gruppen solcher Punkte können Systeme konstruirt werden, welche innerhalb gewisser Grenzen eine Wirksamkeit ausüben, die einer beliebigen mathematischen Funktion entspricht. Solche Körpersysteme wirken dann, nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, mit einer jener Formel entsprechenden (empirischen) Kraft.

Wir können weiter untersuchen, ob das erlangte Gesetz $\varphi = -\frac{1}{r^2}$ etwas darüber aussagt, ob die Punktkräfte in einem bestimmten Sinne wirken.

Wir fanden, dass die Veränderung $\frac{1}{r}$ das entgegengesetzte Vorzeichen von der Kraft $-\frac{1}{r^2}$ hat. Da nun Veränderung wie Kraft wirkliche, nicht geborgte, Bestimmungen sind, so kommt ihnen auch die positive Existenz zu; das negative Vorzeichen kann sich also nur auf die Richtung beziehen. Die Veränderung selbst, d. h. $\frac{1}{r}$ als Maass derselben, hat keine Richtung. Diesem Ausdrucke kommt also nur das positive Vorzeichen zu. Der quantitative Werth eines positiven Bruches ist nun ein solcher, der sich vergrössert, wenn der Nenner bei gleichem Zähler kleiner wird. Wenn demnach das Verhältniss

$$\frac{1}{r} = \frac{r_,}{r_{,,}}$$

seinem quantitaven Werthe nach grösser geworden sein soll dadurch, dass $r_,$ zu $r_{,,}$ wurde,

$$\text{also } \frac{r_,}{r_{,,}} > \frac{r_,}{r_,},$$

so muss $r_{,,} < r_,$ sein, und es müssen die Punkte a, b sich einander genähert haben. Soll also $+\frac{1}{r}$ eine wirklich geleistete Arbeit bedeuten, die Leistungsfähigkeit des Systems wachsen wie sein wirklich quantitativer Werth, so bezeichnet das $+$ zugleich ein Näherrücken der Punkte und folglich das Minuszeichen bei $\varphi = -\frac{1}{r^2}$ eine Wirkungsart der Punkte in abstossendem Sinne.

Hier ist nicht etwa zu erwidern, dass bei $-\frac{1}{r}$ die Kraft eine anziehende sein würde; denn die wirkliche Veränderung kann nie das Minuszeichen haben. Es handelt sich hier darum, welche Bedeutung die ohne willkürliche Hypothese aufgestellten Begriffe für die mathematische Interpretation haben, und es wird dabei ganz abgesehen von dem, was bei der experimentellen Untersuchung willkürlich positive und negative Richtung genannt wird. Bei Aufstellung des Potenzials sind nun die Mathematiker unwillkürlich zu obiger Interpretation der $\pm$ Zeichen gelangt, ohne daran zu denken, dass dieselbe logisch begründet werden kann.

Der Koeffizient $m \cdot m_,$.

Dass die Wechselwirkung der Massen aufeinander ihrem Produkte proportional gesetzt werden muss, folgt aus der Relativität des Bewegungsbegriffes. Die Dunkelheit, welche den Begriffen Masse und Materie anhaftete, hat aber auch hier zu Wege gebracht, dass Viele dieses Gesetz für ein empirisch abgeleitetes halten, wo es doch nur ein durch Erfahrung zum Bewusstsein gekommenes logisches Gesetz ist.

Masse ist ein mathematischer Formbegriff, ein reiner Zahlkoeffizient der Wirksamkeit. Mit dem Worte „Materie" dagegen suchte man die Eigenschaften zu umfassen, welche allen Körperelementen gemeinsam seien; wobei man denn apriori annahm, dass es deren ausser der Masse noch andere gäbe, z. B. Ausdehnung und Undurchdringlichkeit. Bei dieser Anschauung war es allerdings zweifelhaft, ob der Koeffizient $m \cdot m_,$ logisch begründet werden

könne. Unsere Analyse dagegen ergab, dass den Körperelementen keine solche Eigenschaften zugeschrieben werden dürfen — wenigstens nicht in der mathematischen Behandlung — dass jene Elemente in rein geometrischen Punkten zu finden seien. Hieraus folgt dann direkt, dass ihre Wechselwirkung nur durch das Zahlenprodukt der Punktanzahl d. h. der Massen auszudrücken ist.

Auch Maxwell hat in seinem Schriftchen „Substanz und Bewegung" gezeigt, dass Newtons Beweis dieses Gesetzes kein experimenteller ist. Die vollständige Form des physikalischen Kausalbegriffes ist also

$$\varphi = -\frac{m \cdot m_{\prime}}{r^2}.$$

Rückblick.

Das Resultat der ganzen Untersuchung ist hiernach folgendes:

Die im logischen Sinne vollkommene Erklärung eines physikalischen Vorganges erfordert Darstellung desselben als einer Bewegung absolut einfacher Elemente, wobei jede Zuhülfenahme irgend einer körperlichen Eigenschaft, wie Härte, Undurchdringlichkeit etc., sowie die Hypothese irgend einer fernewirkenden Kraft ausgeschlossen bleiben muss.

Nur Begriffe, welche als rein formale nachgewiesen werden können, wie die Ausdehnungsbegriffe der Zeit und des Raumes und der Zahlbegriff Masse, dürfen hier vorkommen. Das bewegte Element kann also nichts anderes sein, als die einem Punkte zugeschriebene Masse. Dieses Punktelement ist eine Fiktion von ebensolcher ideeller Art wie die gerade Linie und andere mathematische Begriffe.

Das unserem Versuch einer solchen Naturerklärung zu Grunde liegende Axiom, dass alle Phänomene in kausaler Abhängigkeit stehen, dass also alle Bewegungen der Punktelemente in diese Verbindung gebracht werden können, ist identisch mit der Behauptung, dass diese Elemente mit einer Kraft $\varphi = -\frac{1}{r^2}$ aufeinander wirken; diese Formel ist der in arithmetische Zeichen gebrachte Ausdruck des Axioms von einer allgemeinen physikalischen Kausalität.

Das in Buch A als sog. Hypothese aufgestellte Grundgesetz der Natur ist demnach keine Hypothese, sondern der Versuch, alle Naturerscheinungen ohne Hypothesen irgendwelcher Art zu erklären.

Ist eine Naturerklärung ohne Hypothesen möglich — was wir ja apriori nicht behaupten können — so ist sie mit solchen Elementen auszuführen. Diese Elemente haben aber keine unbedingte Realität; sie sind vielmehr als eine Fiktion des Verstandes in erster Linie zu betrachten und durchaus nicht zu verwechseln mit den Atomen der materialistischen Anschauungsweise, welche glaubt, keine Methaphysik zu treiben, und doch in diesen Atomen mystische Wesen erfindet, welchen eine von Empfindung, Denken oder irgendwelchem Bewusstsein unabhängige ewige Existenz zukomme. Ob solche Wesen möglich, dies zu untersuchen, liegt hier keine Veranlassung vor. Nur soviel ist sicher, dass sie zu keiner mathematischen Behandlung der Physik taugen. Sie sind eine mystische Konstruktion, während der hier definirte Kraftpunkt weiter nichts ist, als der logische feste Ausgangspunkt einer jeden mathematischen Betrachtungsweise.

Dies wird allerdings nicht verhindern, dass Einige hier Schelling'sche Naturphilosophie wittern, währenddem sie mit ihrem ausgedehnten harten Atom von x-Kräften selbst solche treiben. Ist ein Fehler in der gegebenen Deduktion, so ist er ebenso leicht nachzuweisen wie in einer arithmetischen Rechnung; wie es auch keine Schwierigkeit bieten würde, diesen ganzen Abschnitt in aneinandergereihten arithmetischen Formeln zu schreiben. Nur sehe ich nicht, dass hierdurch das Verständniss erleichtert würde, und bin deshalb bei der gewöhnlichen Sprache geblieben.

Wenn übrigens Jemand (wie dies mir schon eingewendet worden ist) glaubt behaupten zu dürfen, dass hier Natur konstruirt anstatt beobachtet worden sei, so muss ich entgegnen, dass gerade das Gegentheil davon hier geschehen; dass vielmehr nur die Regeln der Beobachtungsweise untersucht worden sind. Ebensowenig wie ein Sonnenstäubchen ist hier eine der sog. Naturkräfte konstruirt, sondern nur gezeigt worden, welche Rolle die Formen $+\frac{1}{r}$ und $-\frac{1}{r^2}$ in diesen Naturkräften spielen. Dass aber diese arith-

metischen Ausdrücke, das Potenzial und die Kräftefunktion, von einer Naturkraft, etwa von der Gravitation, abgeleitet worden, wird doch Niemand behaupten, der die Methoden der Mechanik etwas kennen gelernt hat.

Hierbei wird es solche Philosophen vielleicht interessiren von zwei berühmten Mathematikern zu hören, wie sie im Verfolg mathematischer Gedanken zu ihrer grossen Ueberraschung fanden, dass ihre arithmetisch konstruirten Beobachtungsregeln identisch waren mit empirisch aufgefundenen Naturgesetzen.

Laplace sagt in seinem Système du monde:

> „Das Prinzip der Koexistenz der Wellen, vermöge dessen auf einer durch Wellen bewegten Oberfläche ein zweites Wellensystem sich bilden kann, und sich so bewegt als wenn das erstere nicht existirte, ist eins der allgemeinen Resultate, welche auf's Höchste interessiren durch die Leichtigkeit, womit sie die Einbildungskraft in Stand setzen, sich die Erscheinungen und ihre Veränderungen vorzustellen (!). Diese letzteren hängen ab von linearen Differenzialgleichungen, deren vollständige Integrale die Summe ihrer partikulären Integrale sind. Die Wellenbewegungen gehen übereinander ebenso ungestört fort, wie die partikulären Integrale einfach addirt werden können. Es ist höchst merkwürdig, wie man hier in den Naturerscheinungen die intellektuellen Regeln der Analyse verfolgen kann. Dieser Parallelismus (Korrespondenz zwischen Naturerscheinungen und intellektuellen Methoden), wovon uns das Weltsystem zahlreiche Beispiele aufweist, bildet einen der grössten Reize, deren sich die mathematische Spekulation erfreuen kann".

Ich mache hierbei auf einen von Laplace nicht als solchen gekennzeichneten Parallelismus aufmerksam. Wenn das Sonnensystem geometrisch ähnlich zusammengedrückt oder ausgedehnt würde, so blieben alle Bewegungsgesetze dieselben wie jetzt. Diese Konstanz der Bewegungsgesetze könnte aber nicht stattfinden, wenn die Kraft der Gravitation eine andere Form hätte als die proportional dem umgekehrten Quadrat der Entfernung. Diese Konstanz der Bewegungsgesetze nennen wir eine Naturerscheinung. Andrer-

seits haben wir zu bedenken, dass die Natur uns nirgendwo ein konstantes Normalmaass bietet. Alle unsere Maassstäbe, sowohl der Zeit wie des Raumes wie der Wirkung, sind Verhältnisszahlen. Würden die Verhältnisse der Systeme, deren Bewegungen wir studiren, geometrisch ähnlich verändert, so würden wir von dieser Veränderung gar keine Kenntniss gewinnen können. Es versteht sich von selbst, dass auch unsere eigene Körperverhältnisse in demselben Maasse sich verändern müssten, wenn von Systemen die Rede ist, deren Ausdehnungen unserem Körper vergleichbar sind. Hieraus folgt, dass wir alle Gesetze,[1] welche wir der Natur zuschreiben, stillschweigend der allgemeinen Regel unterwerfen, dass sie gültig bleiben für geometrisch ähnliche Veränderungen der Ausdehnung. Das heisst aber nach dem Vorigen nichts Anderes als: wir setzen stillschweigend voraus, das allgemeine Grundgesetz der Natur sei „Wechselwirkung der Elemente proportional dem umgekehrten Quadrat der Entfernung". Dies ist die, nach Laplace's Ausdruck, obiger Naturerscheinung korrespondirende intellektuelle Regel; und sie darf ein zweiter Beweis des physikalischen Kausalgesetzes genannt werden.

Denselben Gedanken finden wir bei Gauss gelegentlich seines Prinzips vom kleinsten Zwange. Er sagt dort:

> „Es ist merkwürdig, dass die freien Bewegungen, wenn sie mit den nothwendigen Systembedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modifizirt werden, wie der rechnende Mathematiker nach der Methode der kleinsten Quadrate Erfahrungen ausgleicht, die sich auf durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Grössen beziehen.

Das ganze Räthsel und die Erklärung dieser steten Korrespondenz besteht darin, dass es nicht das einemal die Natur ist, welche nach diesem oder jenem von ihr beliebig eingerichteten Gesetze Erscheinungen einander folgen lässt, das anderemal der Mathematiker, welcher apriorisch Formeln konstruirt, sondern es ist beidemale die logische Synthese, welche apriorisch eine Regel der Ordnung entdeckt,

---

[1]) Stets zu beachten, dass nur von Bewegungsgesetzen der Punktelemente die Rede ist, oder allen Systemen, welche sich aus solchen konstruiren lassen.

oder, durch Beobachtungen veranlasst, sich dieser Regel bewusst wird, und das anderemal die Erscheinungen der Natur dieser Verstandesregel gemäss ordnet. Einen vollständigen Einblick in diesen nothwendigen Parallelismus gewinnen wir erst durch Analyse der zeitlichen und räumlichen Ordnung.

Buch C.

Die zeitlich-räumliche Ordnung.

I.

Die Zeit, der Bildner des Raumes.

Unter den Empfindungen, welche die Körper in uns erregen, hat man zwei wesentlich verschiedene Gruppen annehmen zu müssen geglaubt; nämlich solche, welche Farbe — Ton — Geruch — Geschmack bezeichnen, und solche, welche sich auf die Ausdehnung der Körper beziehen. Die ersteren werden durch die spezifisch dafür empfänglichen Sinne geliefert, die letzteren aber durch alle Sinne gemeinsam, hauptsächlich durch Gesicht und Getast. Diese zwei Gruppen von Empfindungen waren so verschieden, dass Kant zu der Ansicht kam, jene Wahrnehmung der Ausdehnung müsse als ein nicht weiter analysirbares Vermögen der menschlichen Seele angesehen werden, welches er demnach „reine Anschauung des Raumes" nannte.

Lassen wir uns aber nicht durch diese lange Zeit herrschende Ansicht in der Analyse unserer Empfindungen beirren, so müssen wir finden, dass eine jede Wahrnehmung von Ausdehnung nur dadurch in uns entsteht, dass wir nacheinander verschiedene Empfindungen haben, von denen jede eine gewisse Dauer hat.

Wenn wir uns mit verbundenen Augen zwei Stäbe von uns unbekannter Länge in die beiden Hände geben lassen, oder Stäbe von bekannter Länge, ohne aber die Richtung zu kennen, in welcher sie an unsere Hände geheftet sind, so ist es uns nicht möglich, eine Kenntniss von der Entfernung zu haben, welche die Enden dieser Stäbe trennt. Diese Kenntniss gewinnen wir erst dadurch, dass wir diese Stäbe bis zum Zusammentreffen gegeneinander bewegen; d. h. dadurch, dass wir uns einer Reihe von Muskelempfindungen oder einer einzigen solchen von gewisser Dauer

bewusst werden. Ebendasselbe gilt für Gesichtsempfindungen. Wenn wir zwei Punkte eines Stabes fixiren, dessen Entfernung von unserem Auge wir nicht kennen, so wissen wir weiter nichts, als dass wir zwei verschiedene Empfindungen haben, die insofern von Empfindungen „sauer hart etc." verschieden sind, dass die ersteren denselben spezifischen Karakter haben, die letzteren aber nicht. Von der Länge des Stabes erfahren wir aber erst dadurch etwas, dass wir von dem fixirten ersten Punkt desselben die Augen drehen, bis der zweite in den Fixationspunkt gelangt; also durch eine Reihe Muskelempfindungen von gewisser Dauer. Dass dem Gesicht in Bezug auf Wahrnehmung der Ausdehnung gar kein ausschliesslicher Standpunkt zukommt wird nur deshalb von vielen Physiologen übersehen, weil sie im Alter des Experimentirens und Schreibens schon so oft das Experiment des Augenverdrehens gemacht haben, dass sie von Anfang an schon wissen: wenn zwei so und so unterschiedliche Stellen der Netzhaut einen Eindruck erhalten, so muss eine so und so grosse Reihe von Muskelempfindungen des Auges gemacht werden, wenn man von der fixirten ersten Stelle zur zweiten übergehen will. Durch sog. optische Täuschungen kann man sich bei diesen Experimenten, wie auch vorhin beim Tastexperiment, von allen erworbenen Fertigkeiten in Beurtheilung der Ausdehnung befreien. Diese Fertigkeit in Vergleichung verschiedener Reihen von Muskelempfindungen bringt nach und nach zu Wege, dass wir uns ein Normalmaass für die Ausdehnung in uns selbst konstruiren; ein stets in der Erinnerung liegender Maassstab der Intensität und der Dauer von Muskelempfindungen, welche durchlebt werden müssen, um mittelst Getast oder Gesicht eine bestimmte Distanz zu durchmessen.[1])

Es ist also ganz richtig, dass die Wahrnehmung der Ausdehnung durch ein anderes Element der Empfindung gebildet wird als die spezifischen Merkmale, welche gewöhnlich Empfindungen der Sinne genannt werden. Dieses Element ist aber nicht einem

---

[1]) Diese Zurückführung der Wahrnehmung des Raumes auf diejenige der Zeit, welche ich seit 1875 vertrete, fand ich vor Kurzem zu meiner angenehmen Ueberraschung auch bei dem englischen Physiologen Baine. Ich weiss nicht, wer den Gedanken zuerst ausgesprochen, glaube aber, dass derselbe in verschiedenen Graden der Klarheit bis auf Leibnitz verfolgt werden kann.

bestimmten Sinnesorgane zuzuschreiben und ebensowenig darf es ein apriorisches Vermögen der seelischen Anschauung genannt werden, sondern es ist das allen Empfindungen gemeinsam anhaftende Merkmal der **Dauer**, der zeitliche Verlauf der Empfindung — oder Empfindung der Zeit — aus welchen wir die Ausdehnung, die Ordnung vieler gleichzeitiger Empfindungen konstruiren. Hiermit ist nicht gesagt, dass die Welt nicht auch ohne uns nach Raum und Zeit ausgedehnt sei, sondern dass, wenn auch die reale Welt als eine räumlich ausgedehnte da ist, wir doch den Raum für unsere Empfindungen subjektiv nachkonstruiren müssen, um zu dessen Kenntniss gelangen zu können. Wir sagen dann: das Ebenbild, das reale Aequivalent unserer subjektiven Gesammtvorstellung steht in der objektiven Welt als ausgedehnter Körper. Wer dem nicht zustimmt, müsste behaupten, dass wir nicht durch Einzelempfindungen die Körper wahrnehmen, sondern dass diese direkt in uns hineinfliegen, oder durch eine andere ihnen inhärirende gespenstische Kraft uns mit dem Bewusstsein ihrer Ausgedehntheit erfüllen; denn die Empfindung, das Element aller Wahrnehmung, ist wohl zeitlich, aber nicht räumlich ausgedehnt.[1])

Wenn demgemäss die empirisch in jeder Empfindung wahrgenommene Zeit der Bildner des Raumes ist und es eine Wissenschaft giebt, die Arithmetik, welche alle Gebilde apriorisch konstruirt, die aus einer Vielheit von nacheinander gesetzten Elementen (Einheiten) überhaupt zu bilden möglich ist, so muss es gleicherweise möglich sein alle Unterschiede ausfindig zu machen, welche in einer gleichzeitig gesetzten Vielheit von Elementen denkbar sind; mit anderen Worten: es muss möglich sein, die räumlichen Formen, die geometrischen Figuren, aus der Arithmetik zu entwickeln. Dieses wird in C. III ausgeführt werden.

---

[1]) Speziellere Ausführung dieser Anschauung s. ME. 78 und ff.; auch bei Baine, physiologische Untersuchungen — Taine, l'intelligence.

II.

Definitionen.

Viele in der Gemeinsprache sehr unbestimmt verwendete Wörter müssen bei unserer Aufgabe genau definirt werden, damit der Leser wenigstens nie im Zweifel bleibe, in welchem Sinne dieselben hier verstanden werden sollen.

Die Empfindung

ist ein Zustand des Bewusstseins, oder bewusster Zustand, welcher grammatisch dem Subjekte Seele zugeschrieben wird. Was dieser Zustand ist, wissen wir unmittelbar, da dieser Zustand ein und dasselbe ist mit dem Wissen von unserem Dasein. Dieser Zustand erfordert demnach keine weitere Erklärung in Worten oder Begriffen, so lange wir uns selbst von diesem Zustande Rechenschaft geben wollen. Er fordert Einkleidung in Begriffe, sobald wir einer anderen Seele Mittheilung davon machen wollen. Diese Mittheilung ist nur möglich an eine gleichartige Seele, weil nur eine solche die Möglichkeit hat, denselben Zustand in sich hervorzurufen, gemäss der begrifflichen Vorschrift.

Der Bewusstseinszustand Empfindung findet thatsächlich in unserer Welt in sehr verschiedenen Arten statt; oder, sehr viele Empfindungen können erlebt und unterschieden werden.

An der Empfindung kann man unterscheiden: Dauer, Intensität und spezifischen Karakter. Eine dauerlose Empfindung ist unmöglich; denn was nicht eine gewisse Zeit lang existirt, ist überhaupt nie dagewesen. Was wir nicht eine gewisse Zeit lang empfunden haben, mag diese Zeit auch noch so kurz sein, haben wir überhaupt nicht empfunden. Mit der Empfindung ist uns also das, was wir empirische Zeit nennen, als Thatsache gegeben. Aufgabe der Psychologie ist es, die thatsächlich in unserem Organismus stets komplizirten Empfindungen in ihre einfachsten Elemente, die Einzelempfindungen, zu zerlegen.

Die (sinnliche) Vorstellung

ist eine von uns subjektiv erzeugte Reproduktion der Empfindung, und demgemäss unter gewöhnlichen Umständen von einer geringeren Intensität, als die durch ein Objekt in uns direkt erregte Empfindung. Das Gegentheil findet bekanntlich häufig bei sog. anormalen Zuständen des Organismus statt.

Die Untersuchung der Ursachen, welche es bewirken, dass eine Empfindung in unserem Organismus scheinbar verschwinden und dann wieder auftauchen kann, fällt der Physiologie und in beschränkterem Maassstabe auch der Psychologie zu. Logisch gewiss ist, dass nie eine Empfindung vorgestellt werden kann, die man nie gehabt hat; logisch möglich ist es, dass der Organismus so konstruirt ist, dass die Bewegung, welche in ihm durch die Uebermittelung der Empfindung hervorgerufen wurde, nie mehr verschwindet. Aus erfahrenen Elementarempfindungen können sich im Organismus allerdings Kombinationen bilden, als Vorstellungen auftauchen, die als solche in der Erfahrungswelt nicht vorkommen, oder sogar unmöglich sind; z. B. ein Pferd mit Flügeln.

Denken

ist die logische synthetische Thätigkeit. Dieselbe muss den Inhalt für diese Thätigkeit aus den empirisch gewonnenen Empfindungen hernehmen, kann also nie selbst einen thatsächlichen Inhalt produziren. In diesem Sinne muss der Auster ebensogut Denken zugesprochen werden wie dem Menschen; denn sie unterscheidet die beiden Empfindungen „guter und schlechter Geschmack"; sie erinnert sich derselben, und entscheidet für den guten Bissen. Diese Unterscheidung und darauf folgende Vergleichung zweier empirisch gewonnener Setzungen ist der Elementarakt aller logischen Synthesis, welcher in den höchsten Komplikationen sowohl des Inhaltes wie der Form stets wiederholt wird.

Die komplizirteren, gewöhnlich mit dem Namen Denken bezeichneten Akte der höheren Organismen werden dadurch im Gegensatze zu den niederen Organismen ermöglicht, dass in den ersteren ein viel reicherer Inhalt verschiedenartigster Empfindungen resp. Vorstellungen angesammelt werden kann als in letzteren, dass

die logische Synthesis also ein viel grösseres Feld für ihre Kombinationen findet. Der Elementarakt des Denkens bleibt aber auch in den verwickeltesten Operationen derselbe wie in den einfachsten, grade so wie in den schwierigsten Analysen des mathematischen Kalkuls auch nur eine stete Wiederholung der beiden Sätze: $1 + 1 = 2$ und $1 - 1 = 0$, auf verschiedenen Inhalt angewendet, stattfindet.

Dass wir nun in den Individuen Empfindungen und auch Denken, das unmittelbare Auffassen eines Inhaltes, und das Kombiniren vieler Inhalte, Reflektiren über dieselben, vorfinden, ist eben eine Thatsache; die gewisseste oder absolut gewisse, die sich im Anfange nachweisen liess. Wir vermögen durch das Denken eben die Thätigkeit von dem zu behandelnden Materiale logisch zu trennen. Dass deshalb aber ein isolirtes Dasein von reinem Denken oder reinem Empfinden möglich sein könne, ist hieraus keineswegs zu folgern.

Die Wahrnehmung.

Von der Wahrnehmung einer Empfindung soll hier nicht gesprochen werden, weil es nach unserer Definition der letzteren ein Pleonasmus wäre. Die Wahrnehmung eines Dinges oder Vorgangs ist ein sehr komplizirter Akt, der dadurch entsteht, dass die Einzelempfindungen, welche das Ding in uns erregt, durch das Denken, die logische Synthesis, zu einem einheitlichen Ganzen geordnet wird, und uns so befähigt, eine Gesammtvorstellung von dem Dinge in uns hervorzurufen.

Die gewöhnliche Beobachtung glaubt, dass die Wahrnehmung eines Pferdes ein einheitlicher momentaner Akt der Seele sei. Aber in dem Alter, wo wir dergleichen Beobachtungen zu machen pflegen, können wir uns gar nicht mehr der langen Prozesse erinnern, welche uns vielleicht aus tausenderlei Vorstellungskombinationen, mit mannigfachen Urtheilen und Denkprozessen verknüpft, allmählich die Möglichkeit boten, in einer kurzen Zeit jene Wahrnehmung **Pferd** im Bewusstsein festzustellen. Ebenso möchte der Klaviervirtuose den Anschlag eines zehnfingerigen Akkordes gleichzeitig mit dem Erblicken der betreffenden Noten für eine einfache Seelenreaktion halten, welche eine nicht weiter analysirbare

Grundeigenschaft seiner Seele bilde, etwa eine intuitive Thätigkeitsform seiner Sinnlichkeit; diese klaviaturmässige Ausbreitung seiner Gefühle glaubt er ebenso gegeben wie die dreidimensionale Anschauungsform des Pferdes. Aus solchen Wahrnehmungen ziehen wir allerdings das Material zu unseren Urtheilen; Einzelwahrnehmungen sind fast unmöglich. Dies darf aber nicht verleiten das unseren jeweiligen Mitteln nicht weiter Analysirbare auch schlechtweg für ein Gegebenes, Einfaches zu halten; ebensowenig in der logischen Analyse wie in der Chemie.

Begriff

nenne ich das Wort, womit eine Empfindung, oder ein Denkakt, oder eine Kombination solcher bezeichnet wird. Es giebt also Begriffe sowohl von Empfindungen, wie Vorstellungen, wie Wahrnehmungen d. h. Dingen und Vorgängen.

Begriff eines Gegenstandes, sei dieser nun idealer oder realer Natur, ist die logische Fixirung desselben als eines von allen anderen Gegenständen verschiedenen. Begriffe sind also die Bausteine des Denkens, d. h. der Thätigkeit des abstrakten Vergleichens und Unterscheidens, und sind als solche die Repräsentanten der Vorstellungen, Wahrnehmungen und Dinge für das denkende Kombiniren. z. B. Machen wir eine ganz einfache Wahrnehmung, haben dabei die Empfindung grün, so ist dies eine sinnliche und deshalb wirklich stattfindende Erregung. Reproduziren wir nun in der Erinnerung diese Erregung, so bilden wir die Vorstellung grün, die ebenso etwas Sinnliches ist wie die Wahrnehmung. Bilden wir jetzt den Begriff grün, so sagen wir damit, dass wir das grün als etwas Verschiedenes von allem Andern für die denkende Kombination fixiren wollen. Es ist daher einerlei, ob wir diese denkende Setzung jenes bestimmten Inhaltes durch das Wort grün ausführen, welches durch die Gewohnheit jene sinnliche Vorstellung in uns hervorruft, oder durch die physikalische Umschreibung: 500 Billion Schwingungen, oder $\frac{1}{2000}$ Millimeter Wellenlänge eines hypothetischen Aethers. Diese letztere Umschreibung ruft in uns nicht jene sinnliche Erregung grün hervor; sie bedeutet aber für die Setzung und Kombination der denkenden Thätigkeit dasselbe, wie das kürzere grün als Begriff. Da nun

alles Denken nur in dem Vergleichen und Unterscheiden des Vorhandenen, des sinnlich Empfundenen, besteht, so ist klar, dass bei dem denkenden Individuum der Zeitfolge nach Empfindung zuerst auftritt, dann Vorstellung, dann denkende Ordnung der vielen Empfindungen zu einem einheitlichen Ganzen, d. h. Bildung des Begriffs für ein wahrgenommenes Ding.

Aus diesen Definitionen folgt, dass wir Begriffe weder wahrnehmen noch vorstellen, sondern denkend setzen; dass aber die Begriffsbildung ebensowenig auf den Inhalt der sinnlichen Wahrnehmungen und Vorstellungen beschränkt ist, wie Vorstellungen auf unsere direkten Wahrnehmungen. Ebensogut wie man in der Vorstellung aus erlebten Empfindungen unmögliche Ungeheuer und auch mögliche Thiere aufbauen kann, die man vorher nie wahrgenommen hat, ebensogut können wir bei der denkenden Kombination Begriffe bilden, welche von den Wahrnehmungen nur das eine oder andere Moment festhalten. Man kann aber auch dergleichen Momente (Elementarmerkmale) willkürlich zu solchen Ganzen vereinigen, dass ein sinnliches Aequivalent dieses willkürlich gebildeten Begriffs weder je wahrgenommen wurde, noch vielleicht real möglich ist. Ebensogut nämlich wie wir statt des Begriffes grün das umschreibende Symbol 500 Billion Aetherschwingungen per Sekunde setzen, können wir auch den Begriff, 5000 Billion Schwingungen per Sekunde bilden, obgleich nie ein Mensch eine diesem Begriff entsprechende Farbenempfindung haben kann. Oder: wir bilden uns den Begriff einer Pferdheit, indem wir aus den speziellen Begriffen „schwarzes, braunes, kleines etc. Pferd", welche ein jeder für sich seinen wahrgenommenen realen Repräsentanten in der Welt hat, nur die allgemeinen Eigenschaften aussondern, und zu dem Begriff eines ideellen Pferdes kombiniren. Ein solches allgemeines Pferd ist real nicht möglich, weil ohne die Eigenschaften der Farbe, der Schwere, der bestimmten Grösse nichts sinnlich Reales existiren kann. Dieser Begriff des allgemeinen Pferdes hat aber für das denkende Ordnen den Werth einer allgemeinen Norm, wonach wir beurtheilen, ob andere Gegenstände auch zu der begrifflichen Ordnung jener realen Pferde gehören.

Wir können also ebensogut Ideal- wie Realbegriffe bilden.

Ein jeder Begriff ist als Begriff zulässig, solange er nicht

einander widersprechende Elemente enthält. Ein solcher Begriff mit einander widersprechenden Bestandtheilen ist das bekannte „hölzerne Eisen, das Messer ohne Klinge und Heft“. Ebensofalsch ist aber auch der Begriff der hypergeometrischen geraden Linie, die zugleich gerade und krumm sein soll. Man hat zwar geglaubt, die Lebensfähigkeit dieses Begriffs dadurch beweisen zu können, dass man die arithmetischen Symbole von gerade und krumm vermittelst des geduldigen arithmetischen Verbindungszeichens zusammensetzte, und diese Kombination in Rechnungsformeln weiterführte. Nach dieser Beweismethode hätte aber auch das hölzerne Eisen durch einfaches Zusammenschreiben dieser zwei Worte das logische Bürgerrecht erhalten müssen.

Der Begriff im Allgemeinen ist also ein Gebilde der freien Kombinationsthätigkeit, seinem Inhalte nach durch die empirisch gegebenen Elementarwahrnehmungen beschränkt, aber unbeschränkt in der Verbindungsweise dieser Elemente, sofern nur dem Denkgesetze, dem Satz des Widerspruchs genügt wird. Einer jeden einfachsten Wahrnehmung oder Vorstellung steht ein einfacher Begriff gegenüber, als Repräsentant jenes Vorstellungselementes im denkenden Kombiniren, und den zusammengesetzten Vorstellungen entsprechen ebenso zusammengesetzte Begriffe, die nach mathematisch funktionalem Modus aus den Elementarbegriffen gebildet werden. Was man gewöhnlich Begriffe nennt, ist eine gewisse Klasse dieser Kombinationsbegriffe.

Wenn man z. B. von dem Begriff eines Menschen, eines Hauses etc. spricht, so versteht man darunter die vollständige Definition desselben, also nach unserem Vorigen die vollständige Vorschrift, wie man aus den einfachsten Empfindungen, welche ein Haus in uns erregt, durch bestimmte funktionale Verbindungen derselben die Einheit kombinirt, deren Bild uns bei Nennung des Wortes „Haus“ vorschwebt. Deshalb ist Begriff der Kugel und mathematische Definition der Kugel inhaltlich dasselbe. Die Aufgabe einer Logik der Begriffe ist es, alle Dinge als eindeutige mathematische Funktionen einer Gesammtheit von absolut einfachen Empfindungs- und Formbegriffen darzustellen. Die Grundzüge einer solchen Darstellung sind gegeben ME. 32 u. ff.

Ich streite nicht mit denjenigen, welche Wahrnehmung, Vorstellung, Begriff etc. anders definiren; sondern gebe hier für die folgenden Zwecke streng festzuhaltende Definitionen, weil sowohl im gewöhnlichen wie philosophischen Sprachgebrauche die Bedeutungen dieser Wörter sehr schwankend sind. Man denke nur an das Schopenhauer'sche „Begriff ist eine Vorstellung von Vorstellungen" was auch heute noch bei vielen für eine Definition gilt.

Ein jeder wird wohl schon philosophische Bücher gelesen haben, in welchen diese Wörter von Anfang bis zu Ende gebraucht werden, ohne schliesslich zu wissen, was der Autor genau darunter gedacht hat, wenn überhaupt ein genaues Denken dabei vorauszusetzen war. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, sind hier am Anfange der Untersuchung die genauen Definitionen des hier Gedachten ausgesprochen.

III.

Die Ordnungsreihen der logischen Synthese.

In Kap. I wurde gezeigt, dass alle räumlichen Verschiedenheiten dadurch entstehen, dass zeitlich verlaufende Empfindungen von einem und demselben spezifischen Karakter in gewissen Reihen zueinander geordnet werden, welche Ordnung wir dann den betreffenden jene Empfindungen in uns erregenden Objekten als räumliche Ordnung, d. h. Lage im Raume zuschreiben.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass unser Denken, d. h. die logische Synthese diese Ordnung subjektiv ausführt, womit die Objektivität der Dinge nicht bestritten wird, und dass apriori alle Verschiedenheiten dieser Ordnung bestimmt werden können.

Jeder Gedanke lässt sich formal zerlegen in 1) Setzungen eines gedachten Gegenstandes, sei dies nun eine einfache Empfindung oder ein Ding oder der abstrakte Denkakt selbst, und 2) Verbindung der gemachten Einzelsetzungen zu einem Ganzen. Die Denkthätigkeit wurde in Kap. II demnach definirt als Ausübung der beiden Kar-

dinalthätigkeiten „Setzen und Verbinden“ oder „Unterscheiden und Vergleichen.“ Eine Empfindung ist für das Denken erst eine bestimmte Empfindung, wenn wir sie unterscheiden von jeder anderen Empfindung. Dies ist die unbestreitbare Wahrheit und der Sinn des logisch formalen Satzes der Identität oder des Widerspruchs, womit so häufig die metaphysische Streitfrage verwechselt wird, ob ein Ding sich selbst gleich sei und sich durch alle Zeit gleich bleiben müsse. Sagen wir: der Begriff oder das Wort grün soll etwas Anderes bedeuten wie jedes andere Wort, oder A soll etwas Anderes heissen als non-A, steht zu jedem anderen Begriff in verneinender Gegensetzung (unglücklicherweise „kontradiktorischer Gegensatz“ in der Fachsprache genannt), so ist die hiermit gemachte Forderung: Ein und Dasselbe stets mit demselben Worte zu bezeichnen, weiter nichts als die Bedingung des vernünftigen Sprechens überhaupt. Logiker und Metaphysiker haben aber häufig diese einfache Regel, ohne welche Worte überhaupt keinen Sinn haben können, mit der Frage über die Identität der Dinge vermengt, ohne sich vorher über die Bedeutung dieses Wortes Ding zu verständigen; ein Jeder hatte gewöhnlich eine andere Meinung über das, was ein „eigentliches Ding“ wohl sein möchte.

Mit dem Unterscheiden der Empfindungen (resp. Begriffe) allein wäre aber weder eine Wissenschaft der Logik noch ein vernünftiger Satz überhaupt zu Stande zu bringen. Dazu ist die zweite Kardinalthätigkeit, die Verbindung mehrerer Begriffe zu einem Ganzen, resp. die Vergleichung der Empfindungen, welche durch diese Begriffe bezeichnet werden, nothwendig. Vermöchten wir nicht zwei Empfindungen zu vergleichen, oder dem entsprechend zwei Begriffe miteinander zu verbinden, so könnte weder von einer Wahrnehmung von Dingen und Vorgängen, noch von einer denkenden Bestimmung derselben die Rede sein.

Eine solche Verbindung zweier Setzungen ist der Satz: ein Apfel und noch ein Apfel machen zusammen ein Paar Aepfel; oder indem wir von allem spezifischen Inhalte der Setzungen absehen, wozu uns die Beobachtung veranlasst, und statt dessen nur die That einer denkenden Setzung, die einmalige Ausübung des Denkaktes im Auge behalten, die Formel

$$1 + 1 = 2.$$

Hierbei sehen wir nun gleich, dass von einem Vergleichen der Empfindungen resp. von einem logischen Verbinden der sie ersetzenden Begriffe nicht die Rede sein könnte, wenn sie nicht Vergleichungspunkte hätten. Sätze wie: »Eisen ist schwer, Gold ist gelb, die Trompete klingt schmetternd,« wären sinnlos, wenn es nicht viele verschiedene Dinge gäbe, welche diese Eigenschaften des schweren, gelben, klingenden, in verschiedenen Graden der Abstufung besässen, und dem entsprechend gegeneinander abgestufte Begriffe (Stufen der Gegensätze) gebildet werden könnten. Im anderen Falle würden die Sätze nur heissen: Gold — Eisen — Trompetenklang — ist. Dementsprechend würde keine ordnungsfähige Welt als gegliedertes Ganzes bestehen, sondern ein kaleidoskopartiges Chaos von Einzelempfindungen, worüber zu sprechen ganz unmöglich bliebe. Ja das Einzige, was von einer solchen Welt auszusagen wäre: die Welt besteht aus einem Chaos heterogener Empfindungen, oder: grün, weich, schwer, kalt, hart, sind gänzlich disparate Begriffe — sind nur dadurch als Satzbildung möglich, dass sie als Denkakte einander gleichartig, also in Bezug auf die Denkthätigkeit miteinander verglichen werden können, resp. dass ihre Bedeutung, jene heterogenen unvergleichbaren Empfindungen sämmtlich Zustände eines und desselben empfindenden Subjektes, und als solche auf ein und dasselbe Individuum beziehbar sind. Alle diese disparaten Begriffe müssen, wie jeder Begriff überhaupt, denkend gesetzt werden. In Bezug auf diese Setzung können sie also als Einheiten verglichen (gleichgesetzt) und zu einem Ganzen, dem Weltchaos, in logischer Synthese verbunden werden. Hieraus bestimmt sich die inhaltschwere Aufgabe der Logik dahin, dass es ihr obliegt, alle die Vergleichspunkte der Begriffe, die Abstufungen ihrer Gegensätze, nach allen möglichen Beziehungen hin festzustellen, das formale Schema auszufinden, in welches sich alle möglichen Unterschiede und Gegensätze einordnen lassen; ebenso wie die Mathematik diese Aufgabe für alle Kombinationen löst, die sich aus dem Begriffe der Zahl und der Ausdehnung entwickeln. Diesem Inhalte der Logik gegenüber sind die Lehren von Schluss, Urtheil etc. mehr nur (grammatische) Erörterungen über die Form, in welcher sich dieser Inhalt aussprechen lässt.

Diese Unterschiede der Begriffe, gewisse Stufenfolgen des Gegen-

satzes innerhalb einer Gleichartigkeit, sind es, was mit dem vagen selten definirten Ausdruck »konträrer Gegensatz« gemeint zu sein scheint. Versuchen wir, die Hauptgattungen dieser logisch möglichen Gegensätze festzustellen.

2 und 3 sind beides Zahlen, der Zahl nach also vergleichbar. Diese Vergleichbarkeit resp. Unterschied kann dahin bestimmt werden, dass es zwei aufeinanderfolgende d. h. um die Einheit verschiedene Zahlen der allgemeinen Zahlenreihe sind. Man kann aber auch sagen: innerhalb eines Ganzen von 5 Einheiten stehen 2 und 3 insofern in einer bestimmten Vergleichbarkeit, als sie sich gegenseitig zu dem Ganzen ergänzen. Ich nenne dies den komplementären Gegensatz, analog wie in der Geometrie zwei sich zu einem oder zwei Rechten ergänzende Winkel Komplement und Supplement genannt werden. Aehnlich ergänzen sich die Farben blau und gelb zu grün, blau und roth zu violett, die ganze Skala der Farben zu weiss. In der Optik ist es üblich, die am meisten von einander verschiedenen Farben komplementäre zu nennen. [1])

Eine andere Art des Gegensatzes ist es, in welchem z. B. 5 und 7 in Bezug auf 6 stehen. Die beiden ersteren Zahlen unterscheiden sich um denselben Betrag von 6, die Art ihres Unterschiedes ist aber diametral entgegengesetzt.

Wieder eine andere Art der Gegensätze (Reihe der vergleichbaren Abstufungen) finden wir bei anderen z. B. den Tonempfindungen. Die Töne desselben Instrumentes sind der Klangfarbe nach gleich, der Höhe und Tiefe nach verschieden. Diese Verschiedenheit lässt aber eine Ordnung nach genauer Stufenfolge zu, und kann man deshalb bei ihnen von einer Reihe von Gegensätzen sprechen. Das einmal, zweimal und dreimal gestrichene c hat nicht allein für unser Gehör einen solchen Gegensatz, den wir dahin bestimmen, dass $\bar{c}$ ebensoviel tiefer als $\bar{\bar{\bar{c}}}$ höher denn das mittlere $\bar{\bar{c}}$ ist, sondern der Schwingungsmesser zeigt auch, dass das Verhältniss der Schwingungen $\bar{c} : \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{\bar{c}}}$, dass also $\bar{c}$ und $\bar{\bar{\bar{c}}}$ in derselben Abstufung, aber in entgegengesetzter Richtung von $\bar{\bar{c}}$ verschieden sind; dass sie also zu $\bar{\bar{c}}$ in diametralem Gegensatz der Richtung der Ton-

[1]) Diese Ausdrucksweise der Optik würde mit dem hier vorgeschlagenen Sprachgebrauche allerdings nur annähernd übereinstimmen.

folge, nach Abstufung in geometrischer Reihe stehen. Aehnliches lässt sich von den Intensitäten anderer Empfindungen sagen.

Mit diesen Beispielen ist wohl hinreichend klar gemacht, was unter Ordnung der Begriffe nach Gegensätzen gemeint ist. Alle logischen Kategorien lassen sich daraus ableiten. [1]) Unsere hier vorliegende Aufgabe fordert die Auffindung der Verschiedenheiten, welche in Zeit und Raum möglich sind, und sollen diese aus den denkmöglichen Gegensätzen innerhalb des Begriffes der Ausdehnung entwickelt werden. Denn wenn wir die grösstmöglichen Gegensätze innerhalb eines Begriffes festzustellen vermögen, dann sind alle möglichen Verschiedenheiten nur solche des Grades, der Abstufung, sind also bestimmbar als Stellen auf der Reihe, welche jene Gegensätze verbindet.

Vorerst ist ersichtlich, dass Abstufungen überhaupt (Gegensätze im weitesten Sinne) entweder zwischen gleichartigen oder ungleichartigen Setzungen denkbar sind, demnach entweder quantitative oder qualitative Gegensätze. Wir haben also die äussersten Punkte der quantitativen und der qualitativen Reihe zu bestimmen.

Bei der quantitativen Reihe ist offenbar das Nichts der Quantität, die arithmetische Null, ein Endpunkt. Von hier aus steigt die Abstufung der Quantität aufwärts ohne Beschränkung. Ein der Null am stärksten entgegengesetzter Punkt ist nicht angebbar, existirt nicht, weil dem Denken keine Schranke gesetzt ist, einer beliebig grossen Zahl eine neue hinzuzufügen und dadurch eine grössere zu bilden. Diese Unbeschränktheit des denkenden Fortschreitens bezeichnet man symbolisch durch das Zeichen ∞, mit Worten »unendlich«. Dieses u n e n d l i c h bezeichnet aber nichts Bestimmtes, sondern ist eine negative Bestimmung als Schrankenlosigkeit. Sowohl in der Mathematik wie Philosophie ist dies meist verkannt worden; man hielt das Symbol ∞ für eine Quantität wie jede Zahl, und rechnete mit dessen Hülfe unendliche Resultate und unendliche Widersprüche heraus.

In der quantitativen Reihe selbst ist aber jede Abstufung vollständig bestimmbar und kann deshalb auch in der Realität nie eine

---

[1]) Deren Entwickelung, welche in einer anderen Arbeit folgen wird, fällt sehr verschieden aus von allen bisher konstruirten Kategorientafeln.

Anzahl von Gegenständen angetroffen werden, welche sich nicht in dieser a priori konstruirten Reihe als Zahl finden liesse.

Alle unsere einfachen Empfindungen lassen sich als solche Abstufungen, als Gegensätze in quantitativer Reihe ordnen, nach arithmetischer oder auch geometrischer Progression. Heterogene Empfindungen sind natürlich direkt nicht vergleichbar, aber indirekt, indem sie auf ein und dasselbe abstrakte Normalmaass bezogen werden, z. B. eine Bewegung irgend welcher Art, welche beide Empfindungen unter gewissen Umständen hervorzurufen vermögen.

Sprechen wir von Abstufungen der Qualität,[1]) so kann hierbei, wie ausgeführt, nur von solchen Qualitäten die Rede sein, welche irgend einer Hinsicht nach gleichartig sind. Schon vorhin wurde ein solcher qualitativer Gegensatz erwähnt. Gelb und Blau sind zwei verschiedene Qualitäten, haben aber einen Vergleichspunkt nach dem Begriff der Farbe. Dieselben können ineinander übergehen durch Abstufungen von Farbentönen, welche sich immer mehr von dem Gelb entfernen und in demselben Maasse sich dem Blau nähern. Bekanntlich liegt für unsere Empfindung Grün in der Mitte; wir empfinden aber nicht $1/2$ Gelb plus $1/2$ Blau, sondern Grün. Trotzdem ist es möglich, diese verschiedenen Farbenqualitäten nach einer arithmetischen Reihe zu ordnen, und dadurch in ein gegenseitiges messbares Verhältniss zu setzen. Nehmen wir ein blaues Glas von 1 Centimeter Dicke, und legen darauf successive gelbe Gläser von 1 Millimeter dick und gleicher Intensität, so erhalten wir beim Hindurchsehen eine Reihe von Farbenqualitäten, welche quantitativ geordnet sind nach einer willkürlich gewählten Einheit, dem 1 Millimeter dicken gelben Glase. Wir können aber die Reihe der Farben auch nach einer qualitativen Reihe ordnen, und in dieser Reihe würde das Abstufungsgesetz lauten: Farbe a soll sich zu Farbe b verhalten, wie b zu Farbe c; b soll in der Mitte stehen zwischen a und c der Qualität nach, wie 4 zwischen 3 und 5 der Quantität nach. Diese Abstufung zeigt uns, dass wir mit nützlicher Anwendung auf physikalische Verhältnisse den Begriff

---

[1]) Wir beschränken uns bei dieser Untersuchung der Aufgabe gemäss auf Analyse der Empfindungen objektiven Karakters, d. h. derjenigen, die uns auf eine Aussenwelt schliessen lassen.

eines totalen Gegensatzes der Qualität nach bilden können. Seine Definition lautet:

Wenn zwei Qualitäten durch ihre Vereinigung (zu einer Einheit) zur Qualitätlosigkeit sich aufheben, wenn sie also, quantitativ gemessen, durch ihre Summirung sich zur arithmetischen Null ausgleichen, dann stehen sie in totalem Gegensatze.[1])

Diese Begriffsbestimmung ist vorab rein logischer Natur, von nur formaler Bedeutung. Sie stimmt damit überein, was wir allgemein durch positiv — negativ, ob mit Recht oder Unrecht, auszudrücken beabsichtigen, und es ist hierfür gleichgültig, ob in der Realität Dinge aufzufinden sind, auf welche dieselbe in jeder Beziehung anwendbar ist; genügend für die Zulässigkeit eines solchen formalen Begriffes ist es, dass er nichts in sich Widersprechendes enthält. Ein Beispiel seiner Anwendbarkeit werde aber gleich hier gegeben um die Vorstellung zu fixiren. Durch die Vereinigung verschiedener Farben können wir neue Farben erzeugen; diejenigen darunter, welche den möglichst verschiedenen Farbenton aufweisen, nennen wir komplementäre Farben, und ihre Mischung (Summirung) bringt die Farbe Weiss hervor; aber Farben, deren Mischung die Farblosigkeit — die Luftfarbe der Märchen — erzeugt, kennen wir nicht; wir kennen also keine Farben, die in totalem Gegensatze ständen. Dagegen kennen wir Lichtarten, gewisse Zustände der Lichterscheinung, welche durch ihre Vereinigung bei dem Experiment der Interferenz Lichtlosigkeit, d. h. Finsterniss hervorbringen. Diese Lichtarten stehen ihrer Lichtqualität nach in totalem Gegensatze, ganz einerlei, was die Ursache dieser Qualitäten ist; und diese entgegengesetzten Lichtarten haben beliebig viele qualitativ verschiedene Abstufungen, welche zwischen ihren totalen Gegensätzen liegen und durch das Polarisationsinstrument nach einer Zahlenreihe gemessen werden können.

Gleichfalls ist ersichtlich, dass Empfindung überhaupt, oder deren allgemeinste Abstraktion Dauer, eine (empirische) Qualität ist, auf welche der Formbegriff totaler Gegensatz angewendet

---

[1]) Man könnte diese Art des Gegensatzes auch aufhebenden Gegensatz nennen. Für die hier vorliegenden Zwecke scheint mir aber total das bessere Wort.

werden kann; denn wenn auch die objektive Dauer eine Folge von ein und derselben Form, Folge von Zuständen nach der Zukunft hin (nach vorwärts), so gestattet uns doch die gleichfalls vorhandene psychologische Thätigkeit der Reflexion, — einerlei, durch welchen physiologischen Mechanismus dies dem reflektirenden Individuum ermöglicht wird — eine bestimmte Folge von Empfindungen sowohl in der Reihe nach vorwärts wie nach rückwärts (in der Vergangenheit) zu betrachten. Diese beiden Reihen können sich durch ihre Vereinigung zu dem Ausgangspunkte der Dauer, zu der arithmetischen Null des Geschehens oder der Veränderung, aufheben. Nennen wir also diese beiden formalen Verschiedenheiten der Reihenfolge, Richtung nach vorwärts — rückwärts, so haben wir in dem Begriff der Richtung d. h. der Beziehungsart zwischen den Einzelpositionen einer Reihe: 1, 2, 3 versus 3, 2, 1 eine Qualität, auf welche die vorhin entwickelten Begriffe „Reihe, zwischen, totaler Gegensatz" angewendet werden können; und vermögen wir jetzt an das Problem heranzutreten, die denkmöglichen Verschiedenheiten der Richtung festzustellen.

Vielleicht erregt es Anstoss, dass hier von Richtung als einer Qualität gesprochen wird, und demzufolge auch von qualitativ verschiedenen Richtungen; denn der Sprachgebrauch kennt diese Qualitäten nicht, und ebensowenig die meisten mathematischen Schriftsteller; was allerdings nur zeigt, dass das Studium der Grundlagen dieser Wissenschaft noch sehr im Argen liegt. Jene Lücke des Sprachgebrauchs kann aber die Forderungen der Logik nicht beeinflussen. Die Logik kennt nur ein „gleich oder ungleich", was gleichbedeutend ist mit „quantitativ oder qualitativ Verschiedenes"; ein Drittes giebt es nicht, denn Setzung und kontradiktorische Gegensetzung umfassen das ganze Gebiet des Möglichen. Da nun eine Richtung von der anderen sich nicht durch Grösse unterscheidet, aber doch von ihr verschieden ist, so kann sie es nur durch ihre spezifische Art oder Qualität sein. Der gewöhnliche Sprachgebrauch spricht nicht von Qualitäten der Richtung, weil bei den meisten Zuständen, wo der Richtungsbegriff zum Bewusstsein kommt, dieser Zustand derselbe bleibt, einerlei in welcher Richtung er beeinflusst wird. Ein Gegenstand kommt jedesmal in Bewegung, einerlei in welcher Richtung er gestossen wird; das

Verhalten der meisten Gegenstände bleibt dasselbe, in welcher Richtung auch sie auf uns einwirken. Macht sich aber einmal ein Einfluss der Richtung geltend, dann schreibt die Metaphysik der Sprache dies einer anderen Art von Kraft, oder einer neuen Eigenschaft des Dinges zu, spricht von Nord- und Südmagnetismus, von polarisirtem und gewöhnlichem Licht, positivem und negativ elektrischem Strome, Harz- und Glaselektrizität, Zunahme und Abnahme der Kraft etc., obschon nachträglich ausgefunden wird, dass nur die Richtung der Einwirkungen eine verschiedene ist, also die Qualität der Richtungen sich eigentlich bemerklich macht. Hauptsächlich aber deshalb, weil die möglichen Qualitäten der Richtung in den formalen Zirkel des totalen Gegensatzes gebannt sind, deshalb findet die Sprachmetaphysik dieselbe wesentlich verschieden von dem unendlich Mannigfaltigen, was man sonst „qualitativ verschieden" nennt; und für die Zwecke der gemeinen Sprache mit Recht.

Wir können, wie schon angedeutet, auch diesen Begriff des totalen Gegensatzes in einer arithmetischen Formel ausdrücken und heisst dieselbe

$$+1 - 1 = 0.$$

Daraus folgt aber, dass die sämmtlichen Reihen der Gegensätze sich arithmetisch entwickeln lassen,

die quantitativen aus der Form $1 + 1 = 2$
die qualitativen „ „ „ $+1 - 1 = 0$.

Geben wir dem 1 in diesen Formeln die Bedeutung der Ausdehnung von der Grösse 1 und den Zeichen + — diejenige des totalen Gegensatzes überhaupt, also sowohl die Bedeutung „zuzählen, abzählen" als „vorwärts, rückwärts" Richtungsgegensatz überhaupt, dann muss sich aus diesen Formeln nach arithmetischen Regeln bestimmen lassen, wie viele oder was für verschiedenartige Richtungen überhaupt denkmöglich sind.

Es bedeuten also $(+1)$ und (-1) zwei Richtungen von derselben Ausdehnung, welche in einem totalen Gegensatze der Richtungsart oder Qualität stehen. Wie im Vorherigen gefunden wurde, müssen die zwischen diesen Gegensätzen liegenden Qualitäten, in unserem Falle „Richtungsarten", den Abstufungen einer geometrischen Reihe entsprechen, welche quantitativ bemessen mit $(+1)$ beginnt und mit (-1) endigt, oder auch umgekehrt. Das

arithmetische Symbol einer solchen Reihe ist aber $(-1)^n$, worin der Exponent n alle möglichen Zahlwerthe bedeutet. Diese Formel (siehe ME. 170—185, 303—305) bedeutet weiter nichts als dass, was immer auch mit jenem Symbol (1) bezeichnet wird, sei es ein Ding oder eine Eigenschaft eines solchen, viele andere ihm vergleichbare Gegenstände oder Eigenschaften denkbar sind, und dass die Gesammtheit derselben sich in einer Reihenfolge ordnen lässt, in welcher überall das $(-1)^n$ die mittlere Eigenschaft zwischen $(-1)^{n+1}$ und $(-1)^{n-1}$ bezeichnet.

Ob nun in der Realität Gegenstände aufgefunden werden können, welche alle durch die Form $(-1)^n$ bestimmbaren Abstufungen der Qualität aufweisen, hängt natürlich von dem Wesen jener Gegenstände ab; aber keinenfalls können noch andere Abstufungen vorhanden sein, als durch jene Form, welche eine kontinuirliche in sich zurücklaufende, also allseitig geschlossene Reihe bedeutet. So z. B. kann es in der Zeit nur die beiden Richtungen $(+1)$ und (-1) geben; denn Zeit nennen wir die einheitliche fortlaufende Reihe von Empfindungen, insofern wir das allen Empfindungen gemeinsame Element, die Dauer der Empfindungen betrachten. Diese Reihe bleibt ein und dieselbe, ob wir die Zeit subjektiv betrachten, als individuell empfundene Dauer im Wechsel der Empfindungen, oder objektiv als allgemeines Maass der Dauer von willkürlich gewählter Einheit, auf welches ein jedes Individuum seine Empfindungen reduzirt, indem es seine sog. inneren Empfindungen mit den äusseren (den Veränderungen der Aussenwelt) in geregeltes Verhältniss setzt. Anders ist es beim Raume, weil hierbei viele Empfindungsreihen auf ein und denselben Ausgangspunkt bezogen werden. Dieser Ausgangspunkt, der gemeinsame Ort vieler Empfindungsreihen, kann psychologisch, d. h. subjektiv bestimmt werden als Individuum, Persönlichkeit; aber auch physiologisch, d. h. objektiv als Augenpunkt (Durchschnittspunkt der Sehaxen), oder Zentralpunkt des Leibes etc., je nachdem die Empfindungsreihen des Gesichts oder Getastes oder des Innervationsgefühls etc. zu jener Spezialbetrachtung Veranlassung geben. Je nachdem nun der Raum eines bestimmten Körpers, oder aber der allgemeine Raum, d. h. derjenige, welcher alle denkmöglichen Ausdehnungen enthält, betrachtet wird, werden die Empfindungen Veranlassung

geben, nur einen **bestimmten** Theil, oder aber alle Reihen zu konstruiren, welche in dem logischen Beziehungsbegriff $(-1)^n$ enthalten sind. Diesen Begriff nennen wir Richtung, wenn räumlich oder zeitlich bestimmte Lagen wie $(ab):(ba)$, oder (heute, morgen): (morgen, heute) aufeinander bezogen werden.

Unsere logische Frage: wie viele Richtungen denkbar sind, ist hiermit auf die arithmetische Aufgabe zurückgeführt: zu bestimmen, wie viele verschiedene Reihen von $+1$ nach -1 führen können.

Diese Aufgabe wird gelöst, indem wir für den Exponenten n in der Form $(-1)^n$ alle möglichen Kombinationen des arithmetischen Satzes und Gegensatzes schreiben. Alle diese möglichen Kombinationen werden gegeben durch die komplexe Zahl $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, wie bewiesen ME. 188 u. ff.

Der Ausdruck

$$(-1)^{\alpha+\beta i}$$

muss demnach das Geforderte leisten, d. h. bei Deutung der Einheit auf eine Ausdehnung und Einstellung aller ganzen und Bruchzahlen für α und β alle möglichen Richtungen geometrisch eindeutig angeben, welche denkbar, und demnach auch im unbeschränkt gedachten allgemeinen Raume empirisch angebbar sind.

Dass jene Form dies wirklich leistet, ist leicht zu zeigen.

Sei $ab = 1$ eine der Lage nach fest bestimmte Linie, d. h. Richtung von der Ausdehnung 1. Werde diese Richtung als Ausgangsrichtung der Betrachtung, also durch die Nullstelle $(-1)^0$ der qualitativen Reihe $(-1)^n$ bezeichnet, so bestimmen bekanntlich die reellen Zahlen des Exponenten alle Richtungen einer Ebene *bdce* (Fig. 17).

Ebenso nun wie die Hinzufügung einer imaginären Zahl zu einer realen geometrisch zu konstruiren ist als Fortführen einer geraden Linie in einer dazu senkrechten Richtung, ist die Hinzufügung einer imaginären zu einer realen Zahl des Exponenten von (-1), also die geometrische Konstruktion der Form $(-1)^{\alpha+\beta i}$, Fortführung der Drehung der Linie ab um den Winkel α in einer dazu senkrechten Ebene um den Winkel β. Die durch $(-1)^{\alpha+\beta i}$ bezeichnete Richtung ist demnach ak.

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht, indem man diese Konstruktion von verschiedenen Fundamentalebenen ausführt und die dabei entstehenden komplexen Zahlen arithmetisch reduzirt; alle Konstruktionen werden dasselbe Resultat ergeben.

Wird dem $(-1)^n$ noch ein Koeffizient A gegeben, welcher die Länge einer beliebigen Linie im Verhältniss zu $ab = 1$ angiebt, so erhalten wir die Form

$$A\ (-1)^{\alpha + \beta i}$$

mit welcher die Lage eines jeden Ortes im Raume eindeutig bestimmbar ist.

Die Punkte $b = (-1)^0 = +1$ und $c = (-1)^1 = -1$ können aber auch durch andere Reihen verbunden werden; z. B. durch eine solche, in welcher A in der Form $A\ (-1)^0$ bis zu Null abnimmt, und von dort in der Form $A\ (-1)^1$ zunimmt; oder man lässt in derselben Form $A\ (-1)^n$ das $+A$ arithmetisch in $-A$ übergehen. Hierdurch würden die Punkte der geraden Linie bestimmt. Gleichfalls kann man irgend zwei Punkte

$$A\ (-1)^{n + \nu i} \text{ und } B\ (-1)^{m + \mu i}$$

durch irgend eine kontinuirliche Reihe ineinander übergehen lassen Dieselben bestimmen dann kontinuirliche Kurven, welche jene beiden Positionen verbinden; aber kein solcher Kurvenpunkt kann auf a bezogen eine andere Richtung angeben als die empirisch auffindbaren.

Hiermit ist auch das mathematische Problem gelöst, welches von den Geometern vorzeitig als unlösbar aufgegeben worden ist: die Aufgabe durch rein arithmetische Zahlformen einen jeden Punkt im Raume zu bestimmen, ebenso wie dies bisher für die Ebene mit der komplexen Zahl gelungen ist. Man bewies sogar ganz richtig, dass keine analog der komplexen Zahl nachgebildete Form diese Aufgabe lösen könne. Aber damit ist die Sache nicht zu Ende.

Dass eine Summenform wie $m + ni + ri' + \ldots.$ dies nicht fertig bringen könne, war allerdings richtig, dass aber eine Exponentialform diese Aufgabe löst, wurde oben gezeigt. Dass man auch mit solchen Exponentialformeln rechnen kann, wird im nächsten Kapitel gezeigt werden, woselbst die Bedenken und Einwendungen, welche

mir von Mathematikern hiergegen gemacht worden, ihre Widerlegung finden.[1])

Hiermit sind alle geometrischen Bildungen auf arithmetische Kombinationen zurückgeführt; d. h. auf Kombinationen der zwei Sätze

$$1 + 1 = 2 \quad \text{und} \quad 1 - 1 = 0,$$

die räumlichen Unterschiede demnach auf Unterscheidungen des denkenden Setzens. Zwei andere Beweise dieses Satzes, dass nur die Logik, nicht aber irgend ein spezifisch hierzu eingerichteter Sinn oder Sinnlichkeit Schöpfer der subjektiven Raumesanschauung ist, finden sich ME. 70, 217 u. ff.

Als weiterer Prüfstein für die Richtigkeit dieser Raumtheorie werden uns Kap. V einige dunkele Punkte der Geometrie dienen. Denn wenn unsere Behauptung zutreffend ist, dass alle geometrischen Verhältnisse auf arithmetische zurückgeführt werden können, so müssen die spezifisch geometrischen Axiome, deren Verbindung mit den arithmetischen bisher nicht gelang, nach unserer Methode ihre Lösung finden.

IV.

Unvollkommenheiten analytischer Symbolik.

Es sind mir von Mathematikern einige Einwendungen gegen die arithmetischen Formulirungen dieser Ausführungen gemacht worden, deren Diskussion neues Licht auf einige Theile derselben und zugleich auf die Stellung der Mathematik in der Logik zu

---

[1]) Die Art, wie Scheffler in seinem Situationskalkul und Hamilton in seinen Quaternionen diese Aufgabe zu lösen suchen, ist keine arithmetische, sondern eine empirische, deren sich auch der praktische Mechaniker bedient. Denn Schefflers zu diesem Zwecke erfundener Wälzungskoeffizient und Hamiltons zweite Art imaginärer Grösse sind willkürliche Konstruktionen mit empirisch angenommenen Richtungen des Zählens, welche nicht aus dem einen Satz und Gegensatz der Logik, wie unsere Formel, abgeleitet werden können.

werfen geeignet ist. Es wurde mir entgegengehalten, dass die Formel $a(-1)^{\alpha+\beta i}$ nicht als arithmetische Darstellung der Oerter im Raume gelten könne, weil diese Formel sich nach bekannten Rechnungsregeln in einfachere Formen umwandeln lasse, nämlich als:

$$a(-1)^{\alpha+\beta i} = a(-1)^{\alpha} \, . \, (-1)^{\beta i} = a e^{\pi i \alpha} \, . \, e^{-\pi \beta} = m+ni$$

und das letzteres Binom, wie bekannt, nur Oerter in einer Ebene aber nicht im Raume angebe.

Ich werde zeigen, dass dieser Umstand nicht einen Fehler in den gegebenen Ausführungen oder in der konstruirten Formel kennzeichnet, sondern Unvollkommenheiten der Bezeichnung, welche sowohl Leibnitz wie einige andere Mathematiker anzuerkennen vorurtheilslos genug waren; Unvollkommenheiten, wodurch gleichfalls der logische Unterschied zwischen arithmetischen Mannigfaltigkeiten und Raumdimensionen dermassen verdeckt wurde, dass selbst ein Riemann denselben nicht zu erkennen vermochte.

An anderer Stelle (ME. 192) habe ich ausgeführt, dass die Vorzeichen + — der Arithmetik, welche für eindeutige Bezeichnungen gelten, in nicht weniger als vier logisch verschiedenen Bedeutungen von den Mathematikern gebraucht werden, nämlich als: 1) positiv — negativ, 2) mehr — weniger, 3) vorwärts — rückwärts, 4) reell — virtuell. Die Bedeutungen 1) 2) 3) haben den Begriff des totalen (aufhebenden) Gegensatzes gemeinsam und sind infolge dieses gemeinsamen Elementes gewissen gemeinsamen Behandlungsarten (Rechnungsregeln) zugänglich. Die Bedeutung 4) implizirt dagegen den Begriff des komplementären Gegensatzes und tritt deshalb erst bei Verbindungen der Vorzeichen mit dem Produktbegriffe in Rechnungen auf. Die Symbole $\times$, :, $\sqrt{}$, 1^n der Multiplikation, Division, Radizirung, Potenzirung, sind aber noch in viel höherem Masse vieldeutig, weil sie aus Vervielfachungen der + — Zeichen entstanden sind und deshalb deren Vieldeutigkeit noch weiter vervielfachen. Weiter unten werden einige Beispiele dies zeigen. Von alledem nimmt aber die heutige Analysis bei ihren Formelkombinationen gar keine Notiz; ja es wird bei den philosophischen Grundlegungen derselben nicht einmal die Frage aufgeworfen, was denn eigentlich ein Vorzeichen sei; eine Frage, die

doch wahrhaftig bedeutsam bei einer Wissenschaft ist, welche behauptet, nur mit dem Grössenbegriffe zu operiren. Wenn die Vorzeichen überhaupt etwas bedeuten, so bedeuten sie doch wohl wenigstens Begriffe. Weil die Grundlagen der Analysis sich nicht in Folge eines logischen Raisonnements, sondern an der Hand instinktiv gefundener Methoden entwickelten, welche ihre Anerkennung dem praktischen Erfolge verdanken, deshalb sehen wir den Gebrauch von unerklärten Zeichen, wie das $\sqrt{-1}$, und auch den Gebrauch von Formeln wie $0 = m + n\sqrt{-1}$, welche geradezu alogisch wären, wenn sie nach der Theorie des Grössendogmas gedeutet werden müssten; denn keine Addition von realen und imaginären Einheiten kann sich zur Null ausgleichen, wie obige Gleichung fordert.

Das ganze Geschäft der Analysis besteht nach Meinung der blosen Rechner darin, einen komplizirten Ausdruck auf einen einfacheren, zuletzt auf die alogische Summe von realen und imaginären Einheiten zu reduziren; das nennen sie eine Aufgabe lösen oder ausrechnen. In allen Fällen, wo das Ziel der Aufgabe ist, Grössen nach Einheiten zu bemessen, ist dies auch richtig. Die Ziele der Mathematik sind aber nicht hierauf beschränkt, und deshalb ist ausrechnen auch nicht das alleinseligmachende Arkanum.

Will man von einem Gemälde wissen, wie gross es ist in irgend einer Beziehung, so ist es allerdings angezeigt, dasselbe zu messen, oder dasselbe in der Papiermühle auf einen einheitlichen Brei zu reduziren. Man kann dann ausfinden, wieviel Gramm von dem uniformen aufzeigbaren Stoffe von gewisser Farbe, Dichte, Härte etc. es enthält. Will man aber ausserdem noch wissen, was das Gemälde bedeutet, so lässt man es ganz, studiert seine Einzeltheile, und Gliederung derselben im Aufbau des Ganzen. Aehnlich ist es aber auch mit einer Menge mathematischer Aufgaben und ihrer graphischen Darstellung in komplizirten Formeln. Dieselben können nicht allein eine Summe von Einheiten bedeuten, sondern jenachdem die Einzelglieder solcher Formeln als Quotient, Summe, Potenz etc. gestaltet sind, ist es möglich, darin Eigenschaften von veränderlichen Grössen, Raumgestalten, Kräften, Bewegungen und Verhältnisse, d. i. Gesetze von alle diesem, auszudrücken. Hieran ist allerdings noch

wenig gedacht worden, aber es kann ausgeführt werden. Ist die hier geforderte Formulirung rationell und eindeutig ausgeführt, dann können aus einer solchen die Eigenschaften und Verhältnisse, welche man durch die Aufgabe kennen zu lernen sucht, direkt abgelesen werden. Mehrere von Möbius für die synthetische Geometrie aufgestellte Formeln entsprechen fast vollkommen dieser Forderung. Will man sich aber mit der Kunst des Ausrechnens begnügen, dann setzt man eben die Stampfmühle in Bewegung, zerstört alle Gliederung, erhält allerdings ein richtiges Resultat, aber dieses sagt weiter nichts, als wie gross die Geschichte ist, z. B.

Man kann ein Parallelepiped nach Grösse, Gestalt und Lage, also in jeder Beziehung vollständig dadurch bestimmen, dass man die Grösse seiner Seiten a, b, c, mit den betreffenden Vorzeichen nach einem System dreier Koordinaten gemessen, zu einem Produkte $\pm a. \pm b. \pm c$ vereinigt. Reduzirt man aber in diesem Ausdrucke nach Manier des Rechners die Vorzeichen auf ein einziges $\pm a. b. c$, so wird dieser Ausdruck schon vierdeutig in Bezug auf die Lage; man hat also die Bestimmtheit der Lage dadurch eingebüsst. Reduzirt man weiter, und vereinigt die drei durch a, b, c angedeuteten Zahlen zu einer einzigen, so hat man als Resultat nur noch eine positive oder negative Zahl, von der man nicht weiss, ob sie nur eine Zahl, oder aber eine Linie, oder Fläche, oder Volum bedeutet. In arithmetisch formulirten geometrischen Aufgaben heisst $a. b. c$ zuweilen eine Linie, zuweilen aber auch Fläche oder Volum. Diese gleiche Notation für ganz verschiedene Sachen ist ein Fehler der Symbolik, der gar nicht dadurch entschuldigt wird, dass der richtige Instinkt des Mathematikers gewöhnlich die richtige oder die zweckmässigste Bedeutung des Ausdrucks herausfindet. Dieser Instinkt hört auf kontrolirbar zu sein, wenn die betreffenden Gebilde nicht mehr anschaulich konstruirt werden können und der Mathematiker trotzdem noch philosophische Schlüsse aus seiner mit einem prinzipiellen Fehler behafteten Symbolik zu ziehen unternimmt.

Das analytische Produkt aus vielen Variabelen nennt man eine arithmetische Mannigfaltigkeit. Die Bedeutung des Produktzeichens $\times$ ist hierbei nur das vervielfachte „mehr — weniger“, und

deshalb liegt gar keine logische Beschränkung für die Häufung solcher Variabelen vor. Nun zeigte Descartes, dass man diesen Zeichen + — auch in einigen Fällen die Bedeutung „links — rechts" geben könne, und seitdem wechseln die Rechner diese Bedeutungen wie sie ihnen eben passen. Bildet man aber ein Produkt + a. + b, wobei dieses + Zeichen sowohl Ausdehnung wie Richtung bedeuten soll, so ist nach logischen Regeln doch anzunehmen, dass hierbei ebensogut die Richtung des Produktes *a b* von derjenigen des *a* und *b* verschieden sein müsse, wie die Grösse, weil das + bei *a* eine andere Richtung als die des + bei *b* bezeichnet.

Was thun aber die Mathematiker? Sie deuten nicht + *a. b* auf eine der Richtung wie Grösse nach veränderte Linie, sondern zuweilen als eine Zahl, zuweilen als Linie oder auch als Fläche. Und warum? darnach fragt man nicht, sondern thut es, weil es zuweilen so gut ist, wie der Erfolg zeigt (die logische Begründung dieser Deutungen siehe ME 281, 264). Wenn diese Deutungen aber nicht mehr anschaulich kontrolirbar sind, nun dann hindert dies doch nicht, die Formeln nach Analogie weiter zu schreiben. Diese Schreibfähigkeit, so wird behauptet, beweise, dass man eine neue Raumart entdeckt habe. Das hölzerne Eisen verdankt derselben Beweismethode seine Existenzberechtigung.

Dem gegenüber haben wir bewiesen, dass bei einem Produkt von mehr als drei Variabelen, welche gerade Linien (nicht geradeste Linien unter gewissen Bedingungen, von Gauss geodätische genannt) bezeichnen, die Vorzeichen + — nicht mehr vorwärts — rückwärts, sondern nur noch mehr — weniger bedeuten können; dass demnach nur drei zueinander senkrechte Richtungen denkmöglich sind. Diese logische Nothwendigkeit, zufolge deren es nur drei qualitativ verschiedene geometrische Gebilde geben kann, Linie, Fläche, Volum, verursacht demnach, dass der Begriff Dimension, welcher jenen drei Ausdehnungen beigelegt worden, total verschieden ist von demjenigen der algebraischen Mannichfaltigkeit, in welcher jene Grössen Faktoren eines Produktes sind, deren Verbindungszeichen $\times$ nichts weiter als vervielfachtes mehr — weniger bedeutet.

Ein anderes Beispiel dieser Unbestimmtheit analytischer Symbolik tritt bei den imaginären Lösungen auf. Suchen wir die

Punkte, in welchen zwei Kreise sich schneiden können, arithmetisch zu bestimmen, so erhalten wir nach der jetzt üblichen Methode für alle Fälle 4 Lösungen, obschon zwei Kreise sich höchstens in zwei Punkten schneiden und in keinem einzigen Punkte, wenn die Entfernung ihrer beiden Mittelpunkte grösser als die Summe der beiden Halbmesser ist. Diese arithmetische Methode muss also Unvollkommenheiten enthalten, weil sie die Aufgabe nicht so bestimmt zu formuliren vermag wie die Sprache. Sie gebraucht ein zuviel von Bestimmungselementen, und giebt diesen Bestimmungsstücken eine allgemeinere Bedeutung als die eindeutigen geometrischen Begriffe. Daher resultiren dann die überflüssigen und real unmöglichen Lösungen, welche durch die mystischen Benennungen von imaginären Kreisen, unendlich fernen Punkten in unendlich fernen Ebenen auf Kugelflächen von unendlich grossem Radius bei dafür empfänglichen Gemüthern den Schein einer ihnen fern liegenden unendlichen Weisheit glaublich macht. Gehen wir aber der Sache logisch zu Leibe, so bleibt weder etwas Imaginäres noch Mystisches oder sonst Unerklärbares zurück.

Als Ausgang obigen Problems dient die Gleichung

$$R^2 = x^2 + y^2$$

welche Gleichung der Kreislinie genannt wird. Dieselbe verdient diesen Namen aber nur für den Fall, wo weder x noch y grösser als R ist. Die rechnende Arithmetik glaubt nun — denn zu einer positiven Behauptung in dieser Beziehung hat sie es bisher schon deshalb noch nicht gebracht, weil sie auf die Bedeutung dieser Frage nie aufmerksam geworden ist — dass eine jede Gleichung oder sonstige analytische Form ihrem Inhalte nach dasselbe aussage, einerlei wie man durch Rechnungsoperationen ihre Gliederung verändert, dass also $\pm a. \pm b. \pm c = \pm abc = \pm n$ sei. Sie beansprucht ausserdem die Freiheit, die Grösse ihrer Variabelen beliebig verändern zu dürfen. Da ist es denn kein Wunder, dass $R^2 = x^2 + y^2$ unmöglich noch ein Kreis sein kann für viele Grössenverhältnisse zwischen R, x, y.

Ich habe (ME. 314) gezeigt, dass deshalb doch noch kein imaginärer (undenkbarer) Kreis herauskommt, sondern etwas sehr Reales; dass nämlich diese verallgemeinerte Auffassung obiger Gleichung nicht mehr eine Kreisgleichung ist, sondern die Gleichung

einer mit dem betreffenden Kreise organisch verbundenen Hyperbel, und dass bei zwei solchen Kreishyperbeln auch stets 4 reale Schnittpunkte vorhanden sind. Damit verschwindet die ganze Mystik des mathematisch Imaginären und der unendlich fernen Gebilde.

Ebenso ist es mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$, wovon man immer noch nicht weiss, welchen inneren Werth man ihm zu geben habe; ob den einer Grösse oder eines Vorzeichens (welches Wort undefinirt bleibt) oder als was sonst. Sofern man darunter eine Zahl versteht, welche mit sich selbst multiplizirt -1 ergiebt, sagt das $\sqrt{-1}$ allerdings nur, dass eine solche Zahl nicht existirt, also lediglich eine alogische Forderung gestellt worden ist. Diese Antwort ist aber unzureichend, denn es werden ganz reale Aufgaben mit Hülfe jenes Zeichens gelöst; also muss es auch etwas Reales bedeuten können. Die logische Lösung liegt nun darin (wie ME ausführlicher dargelegt), dass diese sogenannte imaginäre Einheit nicht allein bei dem Wurzelausziehen entsteht, sondern beim Produktbegriffe überhaupt. Das Wurzelzeichen kann nämlich auch die Bedeutung einer mittleren Proportionale haben und bedeutet in diesem Falle $\sqrt{-1}$ eine Bestimmung, welche der Proportion

$$+x : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -x \text{ genügt.}$$

Wenn wir also eine Aufgabe haben, in welcher durch $+1$ und -1 zwei Bestimmungen angegeben sind, welche zueinander in totalem Gegensatze stehen, und es sind diese Bestimmungen der Art, dass sie andere Bestimmungen zwischen ihren Gegensätzen zulassen, dann bedeutet $\sqrt{-1}$ nichts Imaginäres, sondern etwas ganz Reales. Ein Beispiel hierzu giebt der Begriff der Richtung, und deshalb kann $\sqrt{-1}$ verwendet werden als Ausdruck der Richtung, welche in mittlerer Proportionale zu den durch $+1$ und -1 bestimmten Richtungen steht. $\sqrt{-1}$ ist demnach ein nach arithmetischer Regel richtig konstruirtes Symbol der Linie, welche senkrecht auf der Linie $+1$ bis -1 steht.

Ein formaler Mangel arithmetischer Notation liegt auch darin, dass für den eindeutigen realen Werth eines Wurzelausdrucks nicht ein besonderes Zeichen eingeführt ist, sondern alle arithmetische Formen, welche durch Potenzirung und darauf folgende möglichst

weit ausgeführte arithmetische Vereinfachung des Multiplikationsresultates das unter dem Wurzelzeichen stehende ergeben, schlechtweg eine Wurzel desselben heissen. Bei denkenden Mathematikern ist dies allerdings ohne grosse Bedeutung. Der blosse Rechner verliert aber hier sein Urtheil, denn sein Rechenknecht versagt den Dienst.

Bei unserer Formel $(-1)^n$ ist diese mangelhafte Bezeichnung besonders zu beachten. Ob in dieser Form n eine ganze Zahl oder ein Bruch ist, so bezeichnet dasselbe dennoch eine eindeutig bestimmte Stelle in der betreffenden geometrischen Reihe. Die Arithmetiker schreiben aber beliebig für $(-1)^{\frac{1}{n}}$ auch $\sqrt[n]{-1}$, welche letztere Form n verschiedene Werthe hat. Für unsere Formel ist also zu beachten, dass bei einem Bruchexponenten nur der eine Werth, von Mathematikern zuweilen der absolute genannt, gemeint ist; denn das vieldeutige Zeichen $\sqrt[n]{}$ hat in einer bestimmten Reihe keine Gültigkeit. Die ganze hier auftretende Konfusion, die zuweilen auch bedeutende Mathematiker zu falschen Schlüssen verleitet hat, wäre einfach dadurch zu beseitigen, dass man den Gebrauch des Bruchexponenten für den eindeutigen Werth, das Wurzelzeichen für den vieldeutigen Ausdruck einführte. Alle die bekannten vieldeutigen Symbole der Mathematik sind Unvollkommenheiten der angewendeten Symbolik, wenn es sich darum handelt Resultate auszurechnen. Sie sind aber werthvoll, insofern sie uns anzeigen, dass ein und dasselbe arithmetische Resultat auf sehr verschiedenen Wegen erreicht werden kann. Näheres hierüber ME. 192. Der blose Rechner, und sei er in dieser Kunst der grösste Virtuos, ist deshalb ein verlorener Mann, wenn Aufgaben vorliegen, welche ein Urtheil hierüber erfordern.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so ergiebt sich die Meinung, dass eine analytische Formel ohne Gefährdung ihrer Bedeutung beliebige Reduktionen zulasse, als ein weitreichender Irrthum, und es zeigt sich, dass die drei der arithmetischen Grösse nach gleichen Ausdrücke

$$a(-1)^{\alpha+\beta i} = a(-1)^{\alpha}.\ (-1)^{\beta i} = m + ni$$

ebenso verschiedene Sachen aussagen wie das

$$\pm a . \pm b \pm c = \pm abc = \pm m$$

$a(-1)^{\alpha+\beta i}$ ist die eindeutige Formel für eine Richtung im aume, $a(-1)^{\alpha} . (-1)^{\beta i}$ ist eine vieldeutige Formel für Richtungen in einer unbestimmten Ebene; $m + ni$ ist nur eine Summe von heterogenen Einheiten, welche direkt gar keine Richtung angeben; denn bei Verwandlung der beiden vorhergehenden in dieses Binom ist den Zeichen + — die Bedeutung als Richtung genommen worden, und sie galten nur als plus — minus.

Man kann nun nachträglich diesen Zeichen in dem Binom den Richtungsbegriff wieder beilegen, und dann giebt dasselbe auch wieder eine Richtung an. Aber damit ist die erste Formel nicht rekonstruirt, sondern in Folge der vervielfachten Mehrdeutigkeit der + — Zeichen beim arithmetischen Produkte sagt das Binom $m + ni$ etwas viel Allgemeineres (Unbestimmteres) als $a(-1)^{\alpha+\beta i}$.

Es stellt sich jetzt die bedeutsame Frage nach den Mitteln, um diese Unvollkommenheiten der arithmetischen Methode zu beseitigen. Dies kann auf mehrfache Weise geschehen. Das radikalste wäre, für jeden bestimmten Begriff ein besonderes Zeichen zu gebrauchen; das würde der von Leibnitz angestrebten Karakteristik entsprechen. Wollten diejenigen, welche diese Idee in einem Logikkalkul auszuarbeiten suchen, sich dieses Princips erinnern, so würden sie sehen, dass alle ihre bisherigen Versuche fehl gehen.

Besonders der Gebrauch algebraischer Symbole oder geometrischer Figuren in der Logik kann nur Irrthümer oder im günstigsten Falle unnützen Formelwust hervorrufen, wenn man verabsäumt das Wesen der Rechnung zu ergründen und doch eine logische Rechnerei konstruiren will, in der Art, wie englische Logiker dies begannen und deutsche es nachgeahmt haben. Das Wesen und die Sicherheit arithmetischer Rechnung liegt nicht in der Zifferschrift oder der Zauberkraft sog. Vorzeichen, oder den Rechnungsregeln, die nur für die Mathematik, nicht aber für die allgemeine Logik etwa gültig wären, sondern in der Bestimmtheit der Formbegriffe dieser Wissenschaft und in der Eindeutigkeit der Beziehungsbegriffe, wodurch jene formalen Begriffe verbunden werden. Die Arithmetik beschränkt sich hierbei auf den Gebrauch der beiden Begriffe »Setzung oder wiederholte Setzung und totaler Gegensatz,«

während die allgemeine Logik alle Kategorien, d. h. alle aus dem einfachen Denkgesetze, dem Postulat einer logischen Synthesis, ableitbaren Form- und Beziehungsbegriffe verwendet. Ebendeshalb kann aber nimmer von Rechnungsoperationen der Logik die Rede sein, welche etwa den bekannten arithmetischen gegenüberzustellen wären; sondern diese letzteren sind durchaus logische Operationen, aber solche, die sich nur auf einen beschränkten Theil des Gebietes der Logik beziehen.

Für die praktischen Zwecke der Mathematik würde diese Radikalkur aber zu weitläufig und unbequem werden. Deshalb ist das andere von mir vorgeschlagene Mittel, bei einer vorliegenden Aufgabe nur mit solchen Formen zu rechnen, welche eine Unbestimmtheit der Bezeichnungen durch ihre Form selbst ausschliessen; also z. B. bei geometrischen Bestimmungen der Lage mit Potenzialformen zu rechnen.

Hiergegen ist mir von einigen Mathematikern der Einwand erhoben worden, dass sich bei der Summirung von solchen Ausdrücken die Potenzialform nicht beibehalten lasse, weil das einzige bis jetzt bekannte oder überhaupt mögliche Mittel eine solche Summation auszuführen, die Reduktion vermittelst der Formel $-1 = e^{\pi i}$ sei.

Zur Widerlegung dieses Einwandes gebe ich die nach obigen Prinzipien gefundene Lösung. Es handelt sich also darum, die Summe zweier Ausdrücke

$$a\,(-1)^{\alpha+\beta i} + b\,(-1)^{\gamma+\delta i}$$

deren Exponenten ganze Zahlen oder Brüche sein können, in welchem letzteren Falle aber der ganze Ausdruck als eindeutige Bruchpotenz zu verstehen ist, in einen einzigen Ausdruck $c\,(-1)^{\mu+\nu i}$ zu verwandeln, in welchem $c\;\mu\;\nu$ eindeutige Funktionen von $a\;\alpha\;\beta\;b\;\gamma\;\delta$ sind. Dies wird geleistet durch folgende Formeln;

$$a\,(-1)^{o+\beta i} + b\,(-1)^{\gamma+\delta \iota} = c\,(-1)^{\mu+\nu i}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\,[\cos\beta\,\cos(\gamma-\alpha)\,\cos\delta + \sin\delta\,\sin\beta]}$$

$$\mu = \text{arc.}\cos\left[\frac{a\cos\beta\,\cos\alpha + b\cos\delta\,\cos\gamma}{c\cdot\cos\nu}\right]$$

$$\nu = \text{arc.}\sin\left[\frac{a\sin\beta + b\sin\delta}{c}\right]$$

Der Bogen von 180° als Einheit genommen.

Ich bemerke übrigens, dass eine solche Rechnung mit bestimmten Formen längst besteht, nämlich in dem Infinitesimalkalkul. Die dort gebrauchten Differenziale sind keine unendlich kleinen Theilchen, sondern formale Gesetze, welche eben in dem ausgerechneten Differenzialkoeffizienten eine symbolische Darstellung finden. Das Integral ist keine Summe von kleinen Theilchen, sondern Ausdruck eines bestimmten Falles innerhalb dieses Gesetzes, Anwendung desselben auf ein bestimmt ausgedehntes Gebiet. Dadurch nun, dass eine arithmetische Form, welche ein bestimmtes Bildungsgesetz vermittelst ihrer Gliederung ausspricht, durch das allgemeine Zeichen $\frac{dy}{dx}$ ersetzt wird, bleibt es der Gefahr entzogen, arithmetisch reduzirt, d. h. in seiner formalen Gestalt zerstört zu werden. Soll nun mit einer solchen Infinitesimalformel eine bestimmte Aufgabe ausgerechnet werden, dann wird der arithmetische Werth der Differenziale wieder eingeführt, arithmetisch reduzirt; denn jetzt handelt es sich nur noch um Bestimmung des durch den materialen Inhalt jener arithmetischen Form gegebenen Grössenwerthes.[1])

V.

Das Kongruenzen-Axiom.

Die Euklidischen Axiome lauten (Edition von Gregory, Oxford 1703):

1) Was einem und demselben gleich ist, ist untereinander gleich.
2) Gleiches Gleichem zugesetzt giebt Gleiches.

---

[1]) An mehreren Stellen von Maxwell's Schriften bricht sich die Wahrnehmung Bahn, dass bei gewissen Problemen die arithmetische Reduktion nur Schaden anrichtet, ohne dass er sich vom Grunde dieses Uebels Rechenschaft giebt. Er sagt dann: Obschon es leicht wäre, die Formeln weiter zu vereinfachen, wollen wir sie lieber in den unreduzirten Formen stehen lassen, weil sie uns nur in dieser Gestalt über das vorliegende Problem aufklären können.

3) Von Gleichem Gleiches weggenommen giebt Gleiches.
4) Gleiches Ungleichem zugesetzt giebt Ungleiches.
5) Von Ungleichem Gleiches weggenommen giebt Ungleiches.
6) Gleiches verdoppelt giebt Gleiches.
7) Gleiches halbirt giebt Gleiches.
8) Was einander deckt ist einander gleich.
9) Das Ganze ist grösser als sein Theil.
10) Alle rechten Winkel sind einander gleich.
11) Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, dass die beiden inneren an einer Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, treffen genügend verlängert an derselben Seite zusammen.
12) Zwei gerade Linien schliessen keinen Raum ein.

Man hat diese Sätze hinsichtlich ihres Inhaltes unterschieden als Nominaldefinitionen und wirkliche Axiome, wobei der Begriff dieser Unterscheidungsbestimmungen mehr oder weniger unklar blieb. Nach unseren Definitionen sind die Sätze 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, sprachlich verschiedene Ausdrücke der logisch synthetischen Thätigkeit in ihrer einfachsten Gestalt, welche wir durch die beiden Formeln $1 + 1 = 2$ und $1 - 1 = 0$ symbolisirten. Dagegen sind die Sätze 8, 11, 12, welche gewöhnlich als die spezifisch geometrischen unbeweisbaren Axiome bezeichnet werden — in der Neuzeit auch „Thatsachen einer physischen Geometrie" genannt — weiter nichts als unzureichende Versuche, die elementaren geometrischen Begriffe zu definiren; ehrwürdige Denkmale aus der Kindheit der Wissenschaft, welche Mängel enthalten und demnach durch bessere Definitionen ersetzt werden müssen. Auf die Entwickelung der Wissenschaft haben diese Sätze aber keinen Einfluss, solange man nicht am gesunden Sinn der alten Geometer zweifelt und durch die sprachlich mangelhaften Definitionen an der wesenhaften Bedeutung der Raumbegriffe irre wird. Dies letztere ist in der neueren Zeit geschehen, und es sind dadurch einige Probleme entstanden, welche durch ihre philosophischen Schwierigkeiten den Namen crux geometrarum verdient haben.

Das eine derselben ist die Forderung eines Beweises für die konstante Summe der Dreieckswinkel. Dass diese Aufgabe der mangelhaften Definition des Parallelismus ihr Entstehen verdankt,

und wie sie gelöst, resp. aus der Welt geschafft wird, ist ME. 134—146, 278—281 ausführlich dargelegt worden, kann deshalb übergangen werden. Hier werde nur daran erinnert, dass diese Aufgabe aufgeworfen werden musste, als man zu der Meinung kam, die Mathematik beschäftige sich nur mit dem Grössenbegriffe, als man glaubte, es sei nur selbstverständlich, dass zwei Sachen quantitativ gleich sein könnten, dass aber erst bewiesen werden müsste, ob auch zwei Sachen qualitativ mit einander übereinstimmen könnten, oder vielmehr, dass der Begriff zweier qualitativ gleicher Dinge ein widerspruchsfreier sei; denn dass zwei quantitativ oder qualitativ gleiche Dinge in der Welt nicht auffindbar sind, ist ja zuzugestehen. Deshalb suchte man den Parallelismus fehlerhafterweise aus einer Grössenbestimmung abzuleiten, sprach von einer unendlich grossen Ausdehnung, in welcher sich dergleichen Linien vielleicht treffen könnten, anstatt sich bei der einfachsten Definition paralleler Linien als: solcher, deren Richtung in Bezug auf eine bestimmte Richtung gleichartig ist — mit einer dritten Richtung gleiche Winkel bildet —, zufrieden zu geben. Dass zwei Dinge gleich gross, gleich weiss, gleich schwer etc. sein könnten, wurde zugegeben, dass aber ihre Begrenzungslinien gleiche Richtungen, demnach die Gesammtfiguren gleiche Formen haben könnten, das hielt man für fraglich oder sogar für unmöglich.

Eine bedeutsamere Aufgabe bildet das Kongruenzenaxiom. Seine Aussage wurde für einen logischen Grundsatz gehalten, obschon die Konsequenzen derselben zu einer vorsichtigeren Abschätzung seiner prinzipiellen Stellung hätten auffordern sollen. Soviel mir bekannt, erörterte Kant zuerst diese Konsequenzen, indem er darauf aufmerksam wurde, dass aus kongruenten ebenen Figuren sich inkongruente körperliche zusammen setzen lassen, wodurch also der Satz: „Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches", für Raumverhältnisse nicht zu gelten schien. Kant behauptete, dass man keine inneren Unterschiede in der begrifflichen Begrenzung einer linken und rechten Hand, einer links und einer rechts gewundenen Schraube, angeben könne. Weil aber doch offenbar die linke Hand formverschieden von der rechten sei, so deute dieses Unvermögen unserer Beschreibungsfähigkeit auf einen intelektuellen Mangel,

auf eine Gebundenheit an eine gewisse psychische Organisation. In Kant's Worten:

> „Was ist nun die Auflösung? Diese Gegenstände sind nicht etwa Vorstellungen der Dinge, wie sie an sich selbst sind und wie sie der pure Verstand erkennen würde, sondern sie sind sinnliche Anschauungen, d. i. Erscheinungen, deren Möglichkeit auf dem Verhältnisse gewisser an sich unbekannter Dinge zu etwas Anderem, nämlich unserer Sinnlichkeit beruht."

Ich führe diese Stelle hier an, lediglich um das alte Problem zu illustriren, welches von einer neuen Seite aus aufgefasst werden soll. Die folgende Untersuchung soll nämlich zeigen, dass, ebensogut wie ein Unterschied zwischen der linken und rechten Hand existirt, ebensogut dieser Unterschied auch logisch aufgezeigt und arithmetisch formulirt werden kann; dass hiermit alle geometrische Paradoxie verschwindet, und ein jedes Kongruenzenaxiom für den Aufbau der Geometrie unnöthig wird, — weil es entweder etwas Tautologisches oder etwas Falsches aussagt — und dass die Statuirung der Möglichkeit logischer Synthese überhaupt hinreichend ist für alle Bildung geometrischer wie arithmetischer Prinzipiensätze.

Wir stellen demnach statt der zwölf Euklidischen Axiome nur den einen Satz „Möglichkeit logischer Synthese" auf, und formuliren ihn in den Worten:

> „Gleiches auf gleiche Weise verändert giebt Gleiches".

Aus dem arithmetischen Symbol dieses Satzes, den Formeln $1 + 1 = 2$ und $1 - 1 = 0$ werden wir berechnen, was logisch kongruent genannt werden darf, werden finden, dass verschiedene, gewöhnlich für kongruent angesehene Gebilde den logischen Bedingungen einer Form-Identität nicht genügen.

Wie aus den gegebenen Definitionen erhellt, handelt es sich in der Geometrie nicht um Vorstellungen, sondern um Begriffe, und zwar, nicht um Realbegriffe, d. h. denkende Setzung reeller Gegenstände, sondern um Idealbegriffe, welchen kein Gegenstand genau entspricht, eben weil sie zum Zwecke der allgemeinen Normirung realer Gegenstände von der freien Kombinationsthätigkeit

gebildet werden. Wir haben allerdings nicht angefangen zu denken, ehe wir Empfindungen hatten und daraus Wahrnehmungen (wahrgenommene Dinge) bildeten; denn Unterscheiden — Vergleichen ist nicht möglich, ehe ein Objekt da ist, worauf diese Kardinalthätigkeiten des Denkens angewendet werden können. Wir sind deshalb sicherlich erst durch die Wahrnehmung von zwei Gegenständen zu der Bildung des Begriffs zwei als unterschiedliche Setzung von Einem und noch Einem, zur Bildung des Begriffs gerade Linie durch Wahrnehmung eines geraden Gegenstandes veranlasst worden. Aber deshalb ist der Begriff zwei ebensowenig von der Art jener zwei Gegenstände, wie der Begriff gerade von der geringeren oder grösseren Geradheit des betreffenden Gegenstandes abhängig. Hatten einmal die Dinge unterscheidbare Empfindungen veranlasst, so war das Denken, oder vielmehr das unterscheidende vergleichende Individuum aufgefordert und in Stand gesetzt, zwei dieser Empfindungen als Einheiten des denkenden Setzens begrifflich zu fixiren und in unmittelbarste Verbindung zu setzen, mit anderen Worten: den Begriff des zwei im Nacheinander, und der absolut geraden Linie im Nebeneinander zu bilden, einerlei ob irgend ein Gegenstand existirte, welcher dem letzteren Begriffe vollkommen entsprach. Noch mehr: weil das denkende Setzen die Grenzen der Dinge fixiren kann, während doch in der Realität nur Dinge, aber nicht selbstständig mögliche Grenzen derselben existiren —, deshalb konnten Begriffe gebildet werden, welchen kein sinnliches Aequivalent, kein Ding entspricht, die aber äusserst werthvoll für die absolute Abgrenzung der Dinge von einander, deren Abmessung sind. Ziel der Geometrie ist die vergleichende Abmessung aller möglichen Dinge ihrer Gestalt nach. Unmöglich wäre die Erreichung dieses Zieles, wenn ihre Normen nicht ideale Bestimmungen wären, die eben deshalb, weil sie von dem Denken willkürlich für seine Zwecke gebildet worden, in ihrer Gestalt nicht auf die uns zur Zeit empirisch bekannten Gestalten und Formen beschränkt sind. Die Gegenstände der reinen Geometrie sind solche Begriffe, und wir treiben deshalb keine physische Geometrie, sondern eine Physik, deren Gegenstände nach Begriffen, Postulaten einer Wissenschaft von Idealformen, der sogenannten Geometrie, abgemessen werden. Weil wir

nicht allein denkende, sondern auch empfindende Individuen sind, deshalb werden wir allerdings mit Aussprechen des Wortes „gerade Linie" meist auch eine schwache sinnliche Empfindung, die Vorstellung eines Striches von gewisser Breite und Farbe in uns erregen. Das hindert aber durchaus nicht in unseren denkenden Kombinationen nur das logische Postulat einer von Farbe, Ausdehnung, Schwere absolut freien Richtung, einer Grenzbestimmung sinnlicher Dinge festzuhalten, und alles wegzulassen, was dieser formalen Bestimmung einen realen Inhalt zu geben vermag. Ebenso wie die Arithmetik die rein formale Kombination logischer Elementarsetzungen im Nacheinander, ist die Geometrie rein formale Kombination derselben im Nebeneinander, was jetzt in Sachen der Kongruenz ausführlich bewiesen werden soll.

Betrachten wir das Kongruenzenaxiom in der neueren Ausdrucksweise, welche sich besser der Diskussion fügt als die Euklidische, nämlich:

„Kongruent sind Gebilde, welche sich im Raume so bewegen lassen, dass sie zusammenfallen."

Zweck dieses Axioms ist offenbar die Aufstellung eines Kriteriums, um die formale Identität zweier Gebilde im Raume festzustellen, wenn von der Verschiedenheit des Ortes, an welchem diese Gebilde vorhanden sind, abstrahirt wird. In ähnlicher Weise abstrahirt man bei Gleichsetzung arithmetischer Grössen von der Stelle, an welcher dieselben gebraucht werden. Diese Abstraktion sagt, dass die Identität eines Begriffes überhaupt von Ort und Zeit unabhängig ist; dass w e i s s beständig w e i s s bedeuten soll, einerlei ob dies Wort heute oder gestern, zu Lande oder zu Meer gesprochen wird; denn eine Wort- resp. begriffliche Bestimmung, welche zeigt, dass sie in Asien etwas Anderes bedeutet als in Europa, zeigt eben durch diese Konsequenzen, dass sie nicht unzweideutig, dass sie eben f e h l e r h a f t bestimmt worden ist.

Das k o n g r u e n t der Geometrie ist also nicht etymologisch als z u s a m m e n f a l l e n d zu verstehen, sondern als gleich der Grösse und Gestalt oder irgend einer Bestimmung nach, welche den Karakter des Raumgebildes angiebt. Hier zeigt sich nun, dass man aus Flächen, welche der Kongruenzbestimmung h e u t i g e r

Geometrie genügen (wonach z. B. Dreiecke kongruent sind, wenn ihre respektiven Seiten und Winkel gleich) Volumgebilde zusammengesetzt werden können, welche jener beabsichtigten Gleichheit nicht genügen; dass also in der Geometrie scheinbar der Satz: gleiche Theile bilden gleiche Ganze, nicht zutreffend sei. Ehe wir aber diese Paradoxie dem Raume oder unserem Intellekt aufbürden, ist es doch angezeigt einmal zu untersuchen, ob die Unabhängigkeit der Gestalt vom Orte des Raumes auch wirklich durch das Kriterium der Bewegungsfähigkeit, oder des Transportes, auf irgend eine Weise verbürgt werde; ob also der mechanische Transport wirklich die Veränderung des Raumgebildes jener Forderung gemäss vollbringt, welche vorhin als einziger logisch zu rechtfertigender Grundsatz aufgestellt wurde, des: „Gleiches auf gleiche Weise verändert giebt Gleiches." Bei dieser Untersuchung wird sich ergeben, dass jenes in der Geometrie übliche Merkmal der Kongruenz gegen diesen Satz verstösst.

Vorhin wurde der Ausdruck „mechanischer Transport" gebraucht, um damit anzudeuten, dass wir historisch zuerst veranlasst wurden an die Unveränderlichkeit der Körpergestalt durch den Transport zu glauben, weil wir diese Unveränderlichkeit bei dem Körpertransport empirisch wahrgenommen haben. Aber die geometrischen Gebilde sind keine Körper, sondern fingirte Grenzbestimmungen, und für diese erfordert es eines logischen, nicht eines empirischen Experimentes hinsichtlich der Frage, ob sie durch die Bewegung im Raume ebensowenig verändert werden wie die Körper. Hier hilft kein empirisches Probiren, denn die geometrischen Grenzbestimmungen lassen sich nicht mit Händen greifen wie die Körper, weil sie weder Begriffe von Körpern noch von Vorstellungen sind, sondern Kombinationen der Denkthätigkeit, nach welchen, als absoluten Normen, die Gestalt der Körper abgemessen werden soll. Kein Kathetometer noch Lichtstrahl kann eine geometrische Linie angeben, ja es kann nicht einmal genau angegeben werden, wieviel ihre Linien an gewissen Punkten von der geraden Linie differiren; und dasselbe gilt von der Kreislinie des Theodolithen, wenn sie auch einen Durchmesser von Siriusweiten hätte. Nur der geometrische Kreis ist die absolut konstant gekrümmte Linie, eben weil sie nicht empirisch gefunden oder kopirt, sondern von einem Jeden ideell gesetzt wird;

von einem Jeden, der fähig ist, denkend festzuhalten, dass was einmal als konstant gekrümmte Linie gesetzt wird, unter dem Namen Kreis für alle Zeiten und Oerter und Welten diese Bedeutung behalten soll. Das einzige Mittel zur Durchführung der geforderten Analyse ist, die Begriffe des Raumes und der Bewegung in ihre letzten Elemente zu zerlegen, und dann nachzusehen, ob die **gleiche logische Veränderung** derselben wirklich das erzeugt, was die bisherige Geometrie als kongruente Gebilde anerkennt.

Die letzte Grenzbestimmung eines Raumgebildes ist bekanntlich der Punkt, welcher als solcher der einfachst möglichen logischen Setzung entspricht. Sobald wir mehrere Punkte setzen, haben wir nicht allein viele Punkte gesetzt, sondern auch die Möglichkeit von Beziehungen zwischen denselben, wenn auch nur dadurch, dass ein und dasselbe Bewusstsein die Fiktion von vielen Punkten zugleich macht. Wollte man die Möglichkeit von Beziehungen oder Verbindungen zwischen solchen einfachen Punktsetzungen leugnen, so hätte man sich höchstens für einen jeden Punkt eine gesonderte Welt gedacht. Da diese Welten aber in dem denkenden Individuum zugleich gedacht worden sind, so hat man eben die Möglichkeit der Verbindung dieser Welten gesetzt. Dieser Begriff der Beziehung giebt Anlass zur Bildung der beiden Begriffe „Ausdehnung und Richtung," welche beiden Begriffe in der geometrischen geraden Linie verbunden sind. (Weitere Ausführung hiervon s. M. E. 273.) Hiermit ist das Element der geometrischen Konstruktionen gegeben, und darauf aufmerksam gemacht, dass alle Geometrie mit den zwei durchaus verschiedenen Begriffen „Ausdehnung und Richtung" operiren muss.[1]) Die Operationen der Analysis, welche in ihrer allgemeinen Form nur den Begriff der Grösse gebraucht, den Richtungsbegriff aber ignorirt, ist eben deshalb keine Geometrie, keine Raumwissenschaft, wohl aber eine Methode, welche sich unter gewissen Bedingungen auf die Geometrie anwenden lässt. Descartes fand diese Bedingungen und schuf damit die analytische Geometrie. Seine Entdeckung war aber sozusagen eine empirische. Er fand durch einen glücklichen Griff, dass man alle geometrischen Auf-

---

[1]) Die Geometrie ist bekanntlich von Plücker aus diesem einen Grundgedanken entwickelt worden.

gaben in arithmetische verwandeln könne, wenn man die Raumausdehnungen auf drei in einem Punkte sich schneidenden Linien nach Zahlen messe, und diese Zahlen auf der einen Seite des Ausgangspunktes positiv, auf der anderen negativ rechne. Den logischen Grund, warum dieser technische Kunstgriff so Bedeutendes leistet, und welcher (vergleiche ME. 289 u. ff.) darin besteht, dass den arithmetischen Vorzeichen $+$, $-$, sowohl die Bedeutung mehr — weniger, wie diejenige vorwärts — rückwärts gegeben werden kann, ohne dass diese verschiedenen Bedeutungen in Konflikt gerathen, diesen Grund kannte Descartes ebenso wenig, wie seine Nachfolger daran dachten, dass hier überhaupt eine Frage vorliege. Die Folge hiervon war, dass Riemann es unternahm, die Methode des Descartes zu verallgemeinern und dabei zu dem ungeheuerlichen Gedanken eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen gelangte, weil er ganz übersah, dass durch solche Verallgemeinerung die Bedingungen überschritten wurden, unter welchen jene Methode gültig war.

In den vorigen Kapiteln haben wir gesehen, dass diese Bedingungen nur bei algebraischen Formen bis zum dritten Grade erfüllt sind, dass darüber hinaus die zwei verschiedenen Bedeutungen der Vorzeichen nicht mehr möglich sind.

Wir haben jetzt zu untersuchen, in welcher Weise die Bewegung im Raume die Figuren der Geometrie verändert.

Jeder beliebige Transport eines Punktes im Raume, kann durch Bewegung desselben auf einer geraden Linie bewerkstelligt werden, also durch eine nach Richtung und Ausdehnung bestimmte Veränderung, weil diese beiden Begriffe die Elemente aller Gestalt und Veränderung im Nebeneinander sind. Wenn wir nun statt Punkten Figuren im Raume bewegen, so wird natürlich nur dann ein Gebilde als identisch dem an einem anderen Orte befindlichen gelten dürfen, wenn eine Veränderung aller Punkte des ersten nach demselben Maasse der Entfernung und Richtung das Zweite ergiebt.

Es ist nun leicht zu sehen, dass von den vier Dreiecken, Fig. 18, deren respektive Seiten und Winkel einander gleich sind, die also nach Bestimmung heutiger Geometrie alle einander kongruent sein sollten, nur bae, cad, hfg dem gegebenen logischen

Identitätskriterium genügen; dass aber das Dreieck *dab* hiergegen verstösst.

Dieser Verstoss ist es, welcher die vermeintliche Paradoxie der aus kongruenten Theilen aufgebauten inkongruenten Ganzen verursacht.

Zur Beurtheilung der Veränderungen nach Ausdehnung und Richtung müssen wir einen festen Ausgangspunkt und eine feste Richtung wählen. Sei dies der Punkt a auf der Axe XX. Ein Dreieck wird bestimmt durch die gegenseitige Lage zweier Schenkel desselben. hgf geht über in cda durch Bewegung der beiden Schenkel hf, fg in der Richtung XX um die Entfernung fa. Dreieck cad geht über in bac durch Veränderung der Richtung von ca, ad um 2 rechte Winkel. Um aber in dab überzugehen, müsste ca sich um 2 Rechte drehen, während da in Bezug auf XX in vollkommener Ruhe verbliebe; die beiden Schenkel erleiden bei diesem Transport also nicht dieselbe Veränderung. Der Satz der Geometrie: „Dreiecke sind kongruent oder gleich, wenn ihre Winkel und Seiten einander gleich sind“ ist also unrichtig, wenn das kongruent im Sinne von „gleich in jeder Hinsicht“, dem Begriffe nach (geometrisch eindeutigen Bestimmung nach) identisch, verstanden wird.

Es stellt sich jetzt die Aufgabe, die logische Gleichheit geometrischer Gebilde in einer algebraischen Formel auszudrücken, wodurch zugleich der arithmetische Beweis von der Richtigkeit unserer Theorie geliefert wird. Die Methode, welche C. IV. gegeben wurde, um alle Orte des Raumes arithmetisch zu bestimmen, wird bei dieser Gelegenheit eine Probe ihrer Leistungsfähigkeit zu geben haben.

Es wird nach besagter Methode eine Linie im Raume nach Grösse und Richtung bestimmt durch den Ausdruck $a(-1)^{\alpha+\beta i}$ oder, da wir uns hier auf die Ebene beschränken können, durch $a(-1)^{\alpha}$. Ein Dreieck ist bestimmt durch Länge und Lage zweier seiner Seiten, also eine Funktion derselben; in Zeichen, wenn wir die Richtung $ac = (-1)^0$, demnach $ab = (-1)^1$ setzen

$$\triangle\, fhg = \varphi[fh(-1)^0,\ fg(-1)^{\frac{1}{2}}] \text{ in Worten:}$$

Dreieck fhg ist eine Funktion von den beiden Linien $fh(-1)^0$ und $fg(-1)^{\frac{1}{2}}$.

Nach dem gegebenen Grundsatze darf sich von obiger Formel des Dreiecks fhg der Ausdruck eines jeden mit ihm in jeder Hinsicht gleichen, also logisch kongruenten Dreiecks, nur um einen Koeffizienten unterscheiden, welcher die ganze Funktion, also jeden einzelnen Theil derselben gleichmässig, betrifft. Die Ausdrücke für die Dreiecke sind, wenn man die

$$\text{Schenkellänge } hf = ca = ab = m$$

$$\text{"} \quad fg = ad = ae = n \text{ setzt}$$

$$\text{Dreieck } acd = f[m(-1)^0, \ n(-1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\text{"} \quad abd = f[m(-1)^1, \ n(-1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\text{"} \quad abe = f[m(-1)^1, \ n(-1)^{\frac{3}{2}}].$$

Es wird fhg in acd verwandelt, indem ein jeder Punkt von fhg parallel mit allen andern, also alle in derselben Richtung um die Entfernung hc verschoben werden. Es wird sodann acd in abe verwandelt, indem $f[m(-1)^0, \ n(-1)^{\frac{1}{2}}]$ mit dem Koeffizienten $(-1)^1$, dem Ausdruck der Drehung um 2 rechte Winkel, multiplizirt wird. Aber es existirt kein Koefficient, welcher aus $f[m(-1)^0, \ n(-1)^{\frac{1}{2}}]$ die Form $f[m(-1)^1, \ n(-1)^{\frac{1}{2}}]$, also aus $\triangle\ acd$ ein $\triangle\ abd$ machen könnte. Die gegebene Methode der arithmetischen Darstellung geometrischer Gebilde zeigt also unmittelbar, dass die symmetrischen Dreiecke nicht den Karakter logischer Identität besitzen; und ebenso ist in den betreffenden Formeln der Unterschied dieser Gebilde angegeben, Kants vermeintlich hoffnungslose Aufgabe gelöst.

Die Tragweite des hier für Raumgebilde gelösten Problems wird sich noch besser herausstellen, wenn wir jetzt ein ganz analoges Beispiel für Zeitgebilde konstruiren, welche gleichfalls in ihren Theilen nach dem gewöhnlichen sinnlichen Urtheil für identisch (kongruent) gelten, als Ganze aber für verschiedene Gebilde erklärt werden müssen.

Man kann sich ein Orchesterstück denken, worin ein Instrument eine Tonleiter in gleichmässigen Intervallen, mit begleitenden Akkorden der anderen Instrumente, zu spielen hätte. Fiele es nun dem betreffenden Spieler ein, dieselbe Tonleiter mit denselben

Intervallen rückwärts zu spielen, während die anderen Instrumente bei derselben Akkordfolge verblieben, so würden Disharmonien entstehen. Man kann ja auch Musikstücke und Verse komponiren, welche sowohl vorwärts wie rückwärts lesbar sind, aber dann andere Melodie und anderen Sinn ergeben, und doch sind alle Theile der vorwärts wie rückwärts gespielten Melodie anschaulich identisch. Aber diese sogenannte Anschauungsform der Sinnlichkeit reicht nicht für die vollständige Beurtheilung der Identität beider Sachen aus. Um diese letztere eindeutig zu bestimmen, werden wir uns in der Zeit einen festen Ausgangspunkt wählen müssen, und fordern, dass eine jede Note des einen Stückes dieselbe Zeitdifferenz mit den aequivalenten später gehörten Tönen des zweiten aufweise, ehe wir die Tonfolgen beider, die Melodie überhaupt, für ein und dieselbe erklären; denn das Kriterium unseres logischen Grundsatzes fordert: ein jeder Ton müsse zeitlich um ein und dieselbe Entfernung verändert sein, damit die gleiche Musik reproduzirt werde.

Warum ist nun bei den Wahrnehmungen nach dieser vielgepriesenen Anschaulichkeit, sowohl bei Raum wie Zeitgebilden, eine Paradoxie konstruirbar und logisch auflösbar? Weil diese Anschaulichkeit noch einen Rest von unkritischen Sinnesurtheilen enthält, weil sie nicht bemerkt, dass auch nach dem Begriff der Richtung ein jedes Zeit- und Raumgebilde abgeurtheilt werden muss, und dann höchst erstaunt ist, dass die Vernachlässigung des Unterschiedes von vorwärts — rückwärts sich in Zeitgebilden als früher — später durch Auftreten von Paradoxien ebenso rächt, wie die vernachlässigte Unterscheidung von links — rechts, oben — unten, bei den Raumgebilden. Auch die einfachste geometrische Figur, das Dreieck, ist nicht vollständig beschrieben, nachdem wir gesagt haben „eine jede Seite und Winkel desselben sind so und so gross". Weil diese drei Bestimmungsstücke nicht indifferent neben einander liegen, sondern ein Ganzes bildet, deshalb sind nicht allein die drei auseinander gerissenen Theile von karakteristischer Bedeutung für das Ganze, sondern auch die Form, in welcher diese Theile miteinander zu einem Ganzen verbunden

sind.[1]) Diese Form ist aber die der zeitlichen Folge, vor — nach, sowohl für Zeit wie Raumgebilde, und deshalb muss das vor — nach bei der **vollkommenen** Definition unterschieden werden.

Es zeigt sich jetzt auch die Ursache, welche zur Aufstellung des fehlerhaften Kongruenzenaxioms — besser gesagt „des Kriteriums der Identität anschaulicher Gebilde" — Veranlassung gab. Ursache desselben ist die Verwechslung des **Dreiecks** mit einem flachen von Dreiecken begrenzten **Körper**. Betrachten wir zwei solche Körper, etwa die aus dem Papier ausgeschnittenen Dreiecke *cad*, *dab*. So dünn das Papier auch sein mag, es sind immer Körper, die begrenzt sind durch je ein oberes und ein unteres Dreieck, und drei Parallelogramme an den Schnittflächen durch das Papier. Wir können den Körper *dab* umklappen, und uns dadurch sowohl empirisch wie geometrisch überzeugen, dass sie kongruent sind; aber aus dieser Kongruenz der beiden Körper folgt nicht die Kongruenz der beiden oberen Dreiecke, sondern nur, dass sie durch die Bewegung kongruent gemacht worden sind. Die Körper verändern sich allerdings nicht durch die Bewegung, wohl aber die logische Beschreibung der Körpergestalt, und das geometrisch zu bestimmende Dreieck ist nur eine solche Methode der Beschreibung, nicht aber ein Körper. Ein geometrisches Dreieck existirt nicht in der Natur, kann weder gefühlt noch gesehen werden, sondern körperliche Striche werden gesehen, und dem entsprechend die logische Abstraktion „geometrisches Dreieck, Grenze eines Körpers" gebildet.

Interessant ist hierbei noch die Erörterung der Frage, warum symmetrische Figuren der Ebene, und symmetrische Körper mit parallelen Grundflächen und senkrechten Seitenflächen wie die [illegible] [illegible] in dem Raume stets so bewegt werden

[1]) [illegible]

können, dass ihre respektiven Grenzflächen einander kongruent werden; während dies nicht mehr möglich ist, wenn die Grundflächen nicht parallel sind oder von den Seitenflächen nicht rechtwinklig geschnitten werden.

Das Element aller dieser Figuren ist das Dreieck resp. das orthogonale Prisma. Ein solches Prisma ist durch 3 Punkte bestimmbar, während zur Bestimmung eines schiefen Prisma's wenigstens 4 Punkte nothwendig sind. Drei Bestimmungen behalten aber unter sich immer dieselbe Ordnung, einerlei, wie ihre Elemente permutirt werden. In den 3 möglichen Permutationen dreier Buchstaben *abc acb cab* welche vorwärts und rückwärts (als cyclische Permutation) zu lesen sind, steht ein jeder Buchstabe beständig direkt neben allen anderen des ganzen Komplexes. Dies ist aber bei 4 Buchstaben nicht mehr möglich. In den Permutationen *abcd acdb adbc adcb* kann nicht jeder Buchstabe auf den anderen folgen, wenn wir auch das Rückwärtslesen ebensogut wie das Vorwärtslesen zugeben. Deshalb ist bei drei Bestimmungen die Folge derselben gleichgültig, wenn es uns nur auf die Bedeutung des ganzen Komplexes ankommt; nicht aber bei 4 und mehr Bestimmungen. Es zeigen sich hier die spezifischen Eigenschaften der Zahlen 3 und 4, und es bringt diese Lösung der Kongruenzenparadoxie also wiederum eine Bestätigung der aus dem Karakter der Zahlen (ME. 218) gegebenen Raumtheorie.

Schlussresultate.

Von den gewonnenen Aussichtspunkten aus können wir Rundschau halten und die letzten Fragen beantworten, dahin lautend: was denn eigentlich Kraft und Materie seien.

Naturforscher halten dieselben gewöhnlich für Substanzen, letzte selbständig für sich existirende Grundursachen aller Erscheinungen, das reale Sein selbst. Eine kleine Differenz kommt hierbei nur insofern zu Tage, als die Einen mit der Kraft allein, oder an bewegungsfähige Punkte fixirten Kräften auszukommen glauben, während Andere dieser Wirkungskraft noch ein ausgedehntes Domizil zusprechen, damit ein glaubwürdiges wirkendes Wesen herauskommen könne. Dass wir uns keiner solchen Meinung anschliessen, erhellt aus dem Gange der Untersuchung.

Korrespondenz der Natur- und Denkgesetze.

In engster Verbindung mit den eben erwähnten Fragen steht die in den Zitaten von Laplace und Gauss angedeutete: woher die merkwürdige Korrespondenz der intellektuellen Regeln mit empirisch beobachteten Naturgesetzen stamme; ob dieser Parallelismus ein allgemeiner, oder ob er nur zufällig auf gewissen Erscheinungsgebieten anzutreffen sei.

Indem wir diese letztere Frage zuerst beantworten, wird die Lösung der ersteren näher rücken, ja eigentlich sich von selbst ergeben.

Es kommt hierbei sehr darauf an, was man Naturgesetz nennt, ein Begriff, dessen schwankende Anwendung wohl schon Manchem

unbequem geworden ist. Der Gang unserer Untersuchungen ermöglicht eine genaue Definition desselben, wobei sich zwei wesentlich von einander verschiedene Arten von Naturgesetzen ergeben werden.

Wir haben gesehen, dass es eine grosse Anzahl von Thatsachen giebt, gewöhnlich „Wahrnehmungen" genannt, welche der beständige nach Einzelfällen variirte Ausdruck der Allgemeinregel logischer Kombination sind. Dazu gehört die Wahrnehmung, dass bei allen Körpern drei Dimensionen zu unterscheiden sind, sogar gleicherweise der leere Raum drei solcher Dimensionen habe — wie man zu sagen pflegt. Das wäre also eine gemeinsame Eigenschaft aller realen Körper und auch des leeren Kastens ohne Wände (— man hört das hölzerne Eisen im luftleeren Raume klingen! —). Wer noch an andere Raumarten glaubt, oder an den Aufenthalt von Geistern an Orten, wo gar kein Raum ist, wird diese dreidimensionale Eigenschaft ein Naturgesetz unserer Welt nennen, ebenso wie es auch ein Naturgesetz sei, dass der Mensch 10 Finger trägt. Wir dagegen sehen in dieser Eigenschaft nur die Thatsache, dass eine Vielheit von Empfindungen durch denkende Thätigkeit zu einem einheitlichen Ganzen geordnet wird; also kurz die Thatsache, dass eine Welt von Empfindungen und Denken existirt.

Aehnliche Wahrnehmungen machen wir an den einfachen Maschinen: Hebel, Schraube, Flaschenzug, Spannfeder. Wir sprechen von Naturgesetzen, welche an denselben zu beobachten sind; dem Gesetz von Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, von Erhaltung der Kraft u. s. w. Die Zusammenfassung aller dieser beobachteten Naturgesetze in einer Theorie zeigt uns nun, dass eine solche Theorie gar nicht aufzustellen möglich wäre, wenn jene Naturgesetze andere wären, dass eine theoretische Mechanik, eine logisch fortschreitende Wissenschaft dieselben als unverbrüchlich festzuhaltende Prinzipiensätze voranstellen muss, dass sie also weiter nichts sind als die intellektuelle Regel des Ordnens selbst. Alles Naturerklären in dieser Hinsicht läuft darauf hinaus, unsere Empfindungen, resp. die Dinge, welche als Erreger dieser Empfindungen vorausgesetzt werden, durch ein geometrisches Bild von bewegten Punktelementen zu ersetzen, und aus jenen mechanischen Prinzipiensätzen entnehmen wir die logischen Normen, nach welchen solche Bilder gegeneinander abgemessen und beurtheilt werden.

Z. B. Auf welche Weise kommen wir dazu zu sagen, dass diese Grenze eines Körpers eine gerade Linie sei, dass diese Punkte in einer geraden Linie liegen? Die naive Antwort, dass wir diese gerade Linie, Elementarbestimmung aller physikalischen Beobachtung, eben wahrnehmen, genügt der Analyse letzter Instanz nicht. Die Linie fliegt nicht in uns hinein und überzeugt uns handgreiflich am Seelenzentrum von ihrer Geradheit; ebensowenig ist es eine geoffenbarte Wahrheit und Tugend des Lichtstrahls, dass er sich gerade fortpflanzt, sondern es ist vielmehr ein Ausnahmefall, wenn eine solche gerade Fortpflanzung auf unserer Erde einmal vorkommt. Unsere Tastorgane sagen häufig: das Ding ist krumm, wenn das Auge dessen Geradheit behauptet — und ebenso umgekehrt. Zur physikalischen Behauptung eines Gegenstandes als geraden kommen wir meist erst durch eine grosse Anzahl von Wahrnehmungen, die alle ein verschiedenes Urtheil über jene Geradheit abgeben. Erst durch die Rechnung, durch ein gegeneinander Abwägen dieser verschiedenen Wahrnehmungen und Urtheile kommen wir dazu, jene Punkte anzugeben, welche dem geometrischen Begriff der Geradheit entsprechen; und das intellektuelle auf die physischen Gegenstände angewendete Prinzip, welches bei diesem Abwägen und Bildung des Schlussurtheils leitet, ist das mechanische Prinzip der kleinsten Wirkung, des kleinsten Kraftaufwandes.

Wie C. I erläutert, ist es eine kontinuirliche Reihe von Muskelempfindungen, welche uns das Bewusstsein von der Ausdehnung eines Gegenstandes giebt. Verbinden wir nun zwei Stellen eines Dinges durch verschiedene solche Reihen, indem wir mit dem Auge oder Tastorgan von der ersten zur zweiten übergehen, so werden diese verschiedenen Reihen im Allgemeinen eine jede eine andere Quantität von Ermüdung, Anstrengung, Abwechslung oder nach einem mechanischen Begriffe benannt „Arbeit" erfordern, um von dem einen zum anderen Punkte zu gelangen. Wenn dann in der Bildung dieser Reihen, d. h. in der Wahl des zurückzulegenden Weges zwischen den beiden Endpunkten weder eine physische noch intellektuelle Beschränkung uns auferlegt ist, wird es unter allen den möglichen Wegen einen einzigen geben, welcher die mindeste Arbeit zu seiner Durchmessung erfordert, grade so wie es unter allen Reihen, welche zwei Allziffern verbinden (s. ME. 191) nur

eine einzige giebt, welche nach der arithmetischen Progression realer Zahlen, nach unserer gewöhnlichen Zahlreihe, fortschreitet. Diesen Weg, welcher unseren Sinnesorganen die mindeste Arbeit, den geringsten Kraftverbrauch aufbürdet, nennen wir die physikalisch gerade Linie zwischen den beiden Endpunkten.

Hiermit ist also gleich die Antwort gegeben auf Gaussens Frage, wie es denn komme, dass die Natur nach derselben Manier operire wie der Mathematiker. Natur und Mathematiker sind bei dieser Arbeit keine verschiedenen Personen, sondern der Mathematiker bestimmt eben nach einer intellektuellen Regel, was er als gerade Linie in der Natur anzuerkennen habe. Gaussens Prinzip vom kleinsten Zwange ist weiter nichts, als die Umkehrung des Prinzips der kleinsten Wirkung. Nach dem kleinsten Kraftaufwande, dem Zwange Null, bestimmen wir, was für uns in der Natur das objektive Aequivalent des intellektuellen geometrischen Bildes „Geradheit" ist. Man hat eine analytische Ausstellung an jenem Prinzip der kleinsten Wirkung machen wollen; dass diese Bemängelung aber nicht das logische Prinzip trifft, sondern eine Unvollkommenheit seiner analytischen Formulirung, ist dargethan ME. 374.

Es giebt gewisse Erscheinungen resp. Wahrnehmungen, welche besser als andere dazu angethan sind, uns diese intellektuelle Regel des denkenden Ordnens zum Bewusstsein kommen zu lassen; denn die ursprünglich von dem Individuum ausgeübte logische Synthese ist sich dieser Regel nicht wissenschaftlich bewusst, übt sie aber nichtsdestoweniger (instinktiv) unwillkürlich beständig aus. Das Kind sagt, schwarz ist verschieden von weiss, $1 + 1 = 2$, ohne eine Ahnung zu haben von den Bibliotheken, welche für und gegen die Denknothwendigkeit des Satzes der Identität geschrieben worden, noch von den Prinzipiensätzen etwas zu wissen, in welche Logiker den Gang des Denkens, die Regel des Ordnens, hineinformulirt haben.

So hat die Beobachtung der Umwandlung von Bewegung in Wärme uns hauptsächlich das logische Gesetz von der Erhaltung der Kraft zum Bewusstsein kommen lassen, d. h. nicht von der Erhaltung des Vorgangs, den wir Muskel-, Feder-, elektrische-, Zentrifugalkraft etc. nennen, sondern des Begriffs $\frac{d^2 s}{dt^2}$ der Mechanik, d. i. des theoretischen Kraftbegriffs.

Dieses $\varphi = \frac{d^2 s}{dt^2}$ oder auch das Hamilton'sche Prinzip

$$0 = \int_{t_0}^{t} dt\,(\delta T + U)$$

welches weiter nichts ist, als eine Umwandlung jener ersteren Formel, ist nicht abhängig von einem Urbilde, genannt „Arbeit" oder „Wärme", welche irgendwo in uns oder objektiv ausser uns im Raume hängen, sondern umgekehrt: es ist die Norm, das Maass, nach welchem wir die Quantität unserer Empfindungen bestimmen, welche wir als Arbeit oder Wärme in der Natur gelten lassen.

In gleicher Weise hat Lagrange nicht eine Eigenthümlichkeit der Flaschenzüge oder ähnlicher Maschinen entdeckt, als er sein Prinzip von den virtuellen Geschwindigkeiten aufstellte, sondern er hat die Normalbegriffe der mechanischen Bestimmungsweise gefunden, und gezeigt, in welcher Art dieselben sich an gewissen Maschinen illustriren lassen, welche Theile jener Vorgänge diesen Begriffen aequivalent zu nennen sind.

Hieraus wird es klar, dass überall, wo die Körper solche sind, dass ihre Verhältnisse möglichst genau mit den fingirten Elementen der abstrakten Mechanik übereinstimmen, ihre Veränderungen gleicherweise mit den Regeln des Intellekts übereinstimmen werden; dass also in diesem Falle die empirisch beobachteten Naturgesetze dieselben sind, wie die apriorisch konstruirten Regeln des Mathematikers.

Bewegen sich z. B. starre Körper von sphärischer Gestalt gegeneinander in grossen Entfernungen, so sind diese Verhältnisse nahezu dieselben, wie die der fingirten Kraftpunkte, und ihre Bewegungsgesetze werden Parallelen zu jenen bilden. Sind Körper zu Reihen oder Schnüren verbunden, welche sich in den Beobachtungsgrenzen mit den Massenpunktreihen des Aethers vergleichen lassen, so werden die mathematischen Gesetze solcher Punktreihen in den Schwingungen der Körper empirisch beobachtet. Der Mathematiker bestimmt apriorisch die Bewegungsgesetze eines sog. einfachen Pendels, ohne die geringste Rücksicht zu nehmen auf die Materien, aus welchen Pendel gemacht werden können, oder die Kräfte, welche auf der Erde die Pendel in Bewegung

setzen. Wenn wir nun aber ein irdisches Pendel konstruiren und ausfinden, dass sein Gang nicht identisch mit dem ideellen mathematischen Pendel ausfällt, so bezichtigen wir nicht den Mathematiker des Aufstellens einer phantastischen oder falschen Formel, und sagen: unser empirischer Pendel ist die Norm, nach welcher jene Formeln abgeändert werden müssen, sondern sagen umgekehrt: jene apriorisch gebildete Formel ist die für alle Bedingungen gültige Norm der Begriffe, und wenn die empirischen Thatsachen damit nicht übereinstimmen, so giebt uns die Grösse und Art der beobachteten Differenzen Gelegenheit, Schlüsse zu bilden auf die Struktur des Pendels und die Art der Kräfte, welche auf unserer Erde den Pendel in Bewegung setzen. Lassen sich aber Pendel konstruiren, welche möglichst nahe den Verhältnissen des ideellen Pendels entsprechen — und das ist ja möglich —, dann werden wir auch hier eine Korrespondenz der beobachteten Bewegungen (Naturgesetze) und der intellektuellen Konstruktionen vorfinden.

Anders wird die Sache, wenn von Naturgesetzen gesprochen wird, die sich auf Struktur resp. spezifische Körpereigenschaften beziehen; denn alle diese Eigenschaften sind empirische, welche unsere intellektuelle Ordnung nicht apriorisch bestimmt, sondern aus denen sie eben das ihnen zukommende atomistisch aequivalente Bild konstruirt.

Aus keiner intellektuellen Regel lässt sich ableiten, dass es ein Mariotte'sches Gesetz, dass es elektrische Spannungen, magnetische Anziehungen, konstante Wärmekapazitäten etc. giebt, sondern wenn diese Sachen empirisch vorgefunden werden, so können wir nur mathematisch bestimmen, ob diese oder jene atomistische Struktur den physikalischen Grund für solche Eigenschaften bezeichnet. Für hierauf bezügliche Naturgesetze ist also kein Parallelismus in irgend einem Operationsmodus des Intellekts zu suchen.

Wesen von Kraft und Materie.

In Abschnitt B wurde ausgeführt, dass unsere Urkraft der Elementarsetzungen weder ein Wesen, noch Ding, noch Substanz, sondern ein Beziehungsbegriff ist, eine Verhältnisssetzung von *a* zu *b*. Ein Adverb oder Konditionalpartikel hätte logisch richtiger

den Begriff ausgedrückt, welchen die naive Metaphysik der Sprache nun einmal mit dem Hauptworte „Kraft“ zu bezeichnen strebt. Der Sache am entsprechendsten wäre es, hierzu ein Zeitwort zu verwenden, weil jene Verhältnisssetzung „Kraft“ eine intellektuelle Thätigkeit ist. Ohne unser Denken verschwindet jene Kraft ins Nichts, und es bleibt nur ein Wechsel der Empfindungen als Realität übrig. Die Gemeinsprache erfüllt allerdings ihre Zwecke viel besser mit einem Hauptworte, denn diese Zwecke sind ganz andere als die einer wissenschaftlichen Bestimmung. Was für eine unnöthige Weitschweifigkeit, Mangel an Anschaulichkeit, Poesielosigkeit und geradezu Konfusion würde z. B. entstehen, wenn man statt: die Sonne geht auf, der Luftballon steigt, sagen wollte: die Erde dreht sich wieder einmal so, dass die Richtung nach der Sonne mit der Horizontalebene grösser als Null wird, der Luftballon wird nach oben gedrückt etc.

Und was ist dann die Materie, d. h. die reine Materie, welche vom Körper übrig bleibt, wenn alle seine spezifischen Eigenschaften weggedacht werden; also das ausgedehnte Atom der Materialisten. Es ist gleicherweise ein Nichts; der Repräsentant des Loches, um welches Metall gegossen werden muss, damit eine Kanone daraus werde.

Materie ist das Substrat, der Träger der Körpereigenschaften, genannt worden. Gut; aber aus Tüchern lässt sich ein Kostüm zusammensetzen, ohne dass ein Träger desselben, Mensch oder Kleiderstoff, darin steckt. Die reine Materie ist weiter nichts als die Forderung — und die logische Möglichkeit, diese Forderung zu erfüllen — dass jene Eigenschaften des Körpers, nach bestimmtem Maass, einer bestimmten mathematischen Funktion entsprechend, zusammengefasst werden sollen und können.

Von dem Golde sagen wir, dass es gelb $= a$, von dieser spezifischen Dichte $= b$, dehnbar $= c$, schmelzbar bei dieser Temperatur $= d$, etc..... sei.

Das Gold ist deshalb eine bestimmte Vereinigung dieser Eigenschaften; also Gold $= f\ (a, b, c, d \ldots.)$, worin f eine bestimmte Art und Weise bedeutet, in welcher diese $a\ b\ c$ . . — zu einem Ganzen vereinigt gedacht werden. Wenn diese Eigenschaften

abc .... zurückgeführt sind auf Bewegungen von Punktatomen, dann bedeutet f nicht mehr eine bestimmte Funktion von vielen möglichen, sondern Funktion überhaupt, Abhängigkeit der einen Bewegung von jeder anderen; dann ist die intellektuelle Arbeit, symbolisch durch $f(\ )$ bezeichnet, die reine mit der gemeinsamen Urkraft $-\frac{1}{r^2}$ wirkende Materie. Ebenso wie dieses Symbol nichtssagend ist, solange seine Klammer kein a, b .... enthält, ebenso ist die reine Materie ein Beziehungsbegriff ohne jeden realen Inhalt; der aber eine Realität bilden hilft, sobald Sachen da sind, die aufeinander bezogen werden können.

Diejenigen, welche Kraft und Stoff unterscheiden, können die logische Berechtigung hierzu gleichfalls an dem Symbol $f(\ )$ finden. Die von der Materie losgelöste Kraft ist das f, der von der Kraft gereinigte, also jetzt urreine Stoff ist die Klammer $(\ )$.

Nun wird aber mancher fragen: was wird aber aus unserer lieben greifbaren Welt, wenn ihre letzten nach vieler Mühe erkannten Essenzen „Stoff und Kraft" für Nullen erklärt werden; wahrscheinlich doch auch eine Null?

Mit Nichten; solcher Schluss ist verfrüht, es ist der falsche Schluss des subjektiven Idealismus, der die Welt als eine Vorstellung erkannt hat, dann aber fälschlicherweise schliesst, dass sie auch nichts weiter als eine subjektive Vorstellung sei, die demnach mit Aufhören unseres Bewusstseins zerrinnen müsse.

Wie gesagt ist die ganze in Raum und Zeit bewegte Atomwelt der Physiker vorerst weiter nichts als ein logisches Schema, nach welchem wir den von uns wahrgenommenen Inhalt der Welt, unsere Empfindungen, ordnen; also eine reine Form, oder wie man häufig zu sagen pflegt, eine subjektive Fiktion zur Gewinnung von Ausgangspunkten des Urtheils. Aber nichtsdestoweniger ist Denken sowohl als Empfinden ein thatsächliches Geschehen, eine Daseinsart; und weil diese zu irgend welcher Zeit einmal stattgefunden hat, so muss auch für jede Zeit ein Dasein, ein Etwas vorhanden gewesen sein, weil das gegenwärtige Etwas nicht eine Folge des Nichts sein kann. Dieses Dasein überhaupt nennt der Methaphysiker das Absolute, weil er nicht apodiktisch etwas über seine

Form oder Art des Daseins aussagen will. Der Physiker, welcher jenes Dasein nur in Betracht dessen würdigt, wie es unsere spezifischen Sinne erregt, nennt es die Aussenwelt der Dinge; der Ethiker, welcher seine Bedeutung für unser Wohl und Wehe, die moralischen Werthe erwägt, nennt es Gottheit. Wir müssen zudem im Auge behalten, dass Empfinden und Denken, worin Inhalt und Form der Welt für uns bestehen, nur eine logische Begriffstrennung, dass aber Empfindung ohne Denken gar nicht möglich ist. Deshalb ist es auch unanfechtbar zu behaupten, dass die Empfindung auf ein Objekt hinweise, welches die Empfindung erregt; und weil verschiedene Individuen zu verschiedenen Zeiten dieselben Empfindungen haben, so ist die Behauptung gleicherweise richtig, dass jenes Objekt (Welt) beständig sei, unabhängig von der Einzelexistenz, also nicht lediglich ein subjektives Produkt. Schwierigkeit entsteht erst, wenn wir von diesem Objekt etwas aussagen wollen, was unabhängig von unserem Empfinden und Denken wäre, wenn wir über die Welt und ihr Aussehen etwas sagen wollen unter der Hypothese, dass keine seelenbegabten Individuen existiren sollen, welche jene Aussenwelt anschauen.

Ein solches Unternehmen ist in jeder Hinsicht unzulässig, denn wir können ja nur von der Welt etwas aussagen, insofern sie Empfindungen und Denken erregt. Setzen wir z. B. den Fall, dass immer und ewig Empfinden und Denken in der Welt stattfindet, so kann man mit vollem Recht sagen, dass dann auch eine Welt von Körpern und Dingen existirt, wie sie die naive Anschauung wahrnimmt.

Behauptet aber Jemand, es habe einmal eine Zeit gegeben ohne lebende Wesen, und damals habe sich die Erde als glühender Ball zwischen diesen und jenen Sternen dort und da umhergetrieben etc., es habe eine rein materielle Welt von mysteriösen Atomen gegeben, so ist eine solche Behauptung sinnlos. Richtig bleibt nur der Schluss, dass es immer eine Welt gegeben hat. Von dem jetzigen Zustande der Welt kann man allerdings kausal auf einen früheren Zustand schliessen; aber es bleibt dabei immer vorausgesetzt, dass ein lebendes Wesen jenem früheren Zustande zugesehen habe; oder die Beschreibung des früheren Zustandes ist die Wirkung, welche die Welt von damals auf ein uns gleich

organisirtes Wesen hervorgebracht haben würde. Wird aber dieses letztere ausgeschlossen, so ist es falsch, zu sagen, die Erde sei damals glühend gewesen.

Aber auch jene erste Aussage über den früheren Zustand der Welt gilt nur innerhalb einer bedeutenden Einschränkung; nämlich nicht für ein denkendes empfindendes Wesen überhaupt, sondern für ein solches von unserer speziellen Organisation. Die Erkenntniss, dass die Eigenschaften der Dinge von der Art unserer Sinne abhängen, dass sie bei anders konstruirten Sinnesorganen ganz andere sein würden, ist zwar schon allgemein geworden. Nichtsdestoweniger glaubt der Realismus in seiner Anschauung von den Dingen und deren Eigenschaften eine ziemlich richtige Anschauung von der realen Wahrheit der Dinge zu besitzen, ebenso wie der Theologe, welcher eine sog. göttliche Offenbarung schwarz auf weiss besitzt und seinen Verstandeskräften gemäss auslegt. Vielleicht mögen die Bäume anderen Wesen etwas mehr oder weniger grün, die Steine etwas härter oder schwerer vorkommen, denkt der Realist, aber schliesslich ist doch die Welt zusammengesetzt aus Steinen, Bäumen, Menschen, Ungeziefer, Unkraut etc. Die Formen der Dinge zum wenigsten hält er für gültig überall. Kant hielt die Formen für abhängig von der Art des Intellekts, und dachte an einen puren Verstand, andere Arten von Intellekt etc. Demgegenüber haben wir ausgeführt, dass eine andere Art, sei es thierische oder göttliche, sinnlos ist. Ein Intellekt, welcher nicht den Satz $1 + 1 = 2$ unterschreibt, und eben damit auch räumliche und zeitliche Formen in der Weise konstruirt, wie wir dies zu thun gewohnt sind, ist eben keine andere Art von Intellekt, sondern Unverstand.

Aber die Formen der Dinge sind ebenso abhängig von der Art unserer Sinne, wie die Eigenschaften der Dinge. Was wir als individuell verschiedene Dinge trennen, hängt ausserdem zum grossen Theil ab von unserer Lebensgeschwindigkeit, von der Geschwindigkeit, mit welcher ein Ding auf unsere Sinne einen Eindruck macht, und von der Dauer, mit welcher dieser Eindruck in unserem Empfindungsvermögen haften bleibt. Würde ein solcher Reiz des Auges, anstatt dass er für uns im allgemeinen $\frac{1}{10}$ Sekunde Dauer erfordert, hierzu einige Stunden benöthigen, so würden wir nicht von einer Sonne sprechen, welche sich am Himmel bewegt, sondern

von einem feurigen ringförmigen Körper, welcher beständig die Erde umgiebt, gerade so, wie eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle zum feurigen Rade wird. Wäre eine Reizdauer von nur Trilliontel Sekunden auf unsere Sinne genügend, und lebten wir mikroskopisch klein im Inneren eines Walfisches, so würden wir schwerlich eine Ahnung davon haben, dass der in ungeheuer grosser Entfernung uns umgebende schwarze Himmel eine Thierhaut, dass unser Haus, welches während unseres nur eine Milliontel Sekunde dauernden Lebens stabil bleibt, etwa eine fortwandelnde Blutzelle sei.

Die Individualität der Dinge des Realisten ist also ein ganz relativer Begriff, abhängig von der Organisation des anschauenden Individuums nicht minder als von den Eigenschaften der Dinge. Und wer verbürgt uns, dass es nicht Organe der Empfindung geben kann, welche ebenso wenig den uns bekannten fünf Sinnen etwas analoges haben, wie grün mit sauer? Was würden dann die Realisten unter jenen Wesen von den Bestimmungen der irdischen Realisten sagen? Daraus geht schon hervor, dass von Dingen an sich ebensowenig in dem realistischen Sinne, wie in dem von Platon und Kant geredet werden kann, ganz abgesehen davon, dass das „Ding an sich" ein widerspruchsvoller Begriff ist, weil nur dadurch ein Etwas zum Ding wird, dass es für ein Anderes da ist.

Wenn es also jemals bewiesen werden könnte, dass es vor so viel Millionen Jahren überhaupt keine empfindenden und denkenden Wesen gegeben habe, so müssten wir sagen: dann muss das Absolute eine andere Daseinsart als die uns wahrnehmbare gehabt haben, in welcher wir Materielles und Beseeltes unterscheiden; dann hat es keine Materie gegeben, weil kein Bewusstsein vorhanden war; der Begriff der Materie ist sinnlos, wenn das Denken der Materie negirt wird. Diese Daseinsart aber näher bestimmen zu wollen, liegt ausserhalb unserer Bestimmungsfähigkeit, eben weil wir nur nach dem dann nicht vorhandenen Empfinden und Denken bestimmen können. Jene Daseinsart könnte nur negativ damit bezeichnet werden, dass ihr sowohl das Merkmal der Persönlichkeit, wie des Bewusstseins fehlen müsste, womit natürlich nicht Existenz überhaupt negirt ist. Um jene Daseinsart

positiv bestimmen zu können, müssten wir an ihr theilnehmen, was ja eben nicht der Fall ist. Wenn es dagegen eine Methode gäbe, einen Menschen in jene vorweltliche, vermeintlich pure materielle Welt hineinzuversetzen, so würde er dieselbe natürlich ganz so gestaltet finden, wie wir dieselbe von ihrem jetzigen Aussehen für uns ausgehend an der Hand des Kausalitätsgesetzes für jene präanimalische Periode berechnen und konstruiren.

Aber jene Hypothese, dass einmal keine beseelten Wesen in der Welt vorhanden gewesen seien, ist eine durch nichts begründete vorschnelle Redensart der empirischen Forschungsweise. Es hat eine Zeit gegeben, wo man behauptete, es könnten auf der anderen Seite der Erde keine Menschen geben, weil sie herunterfallen müssten, oder auch weil sie von Adam nicht abstammen und von Christus nicht erlöst worden sein könnten. In ähnlicher Beschränktheit haben Physiologen der Neuzeit gefordert, man solle ihnen die Existenz von Gehirn am Himmel nachweisen, wenn sie glauben sollten, dass dort auch Beseeltes existire; gerade als wenn die ganze Existenzmöglichkeit auf Verschiedenheiten, wie Menschen, Hunde und Katzen etc. beschränkt wäre, auf das was bis jetzt glücklich erwischt und mit dem Messer zerschnitten worden ist. Was können wir davon wissen, in wie weit sich andere Organe, andere Sinne bei beseelten Wesen vorfinden mögen, ob nicht bei anderen Organismen grössere Körperkomplexe, meinetwegen ganze Planeten und Sonnensysteme, die Stelle von dem vertreten, was in unserem Körper die Eiweisszellen sind. Das können wir ebensowenig negiren als behaupten.

Die Relativität der ganzen Körperwelt geht aber noch viel weiter. Setzen wir Wesen voraus, deren Organe nicht das mindest analoge zu unseren Sinneswerkzeugen haben, so werden dieselben nicht allein ganz andere Eigenschaften an den Körpern bemerken als diejenigen, welche Gesicht, Getast etc. uns ausfinden lassen, sondern je nach Umständen werden dieselben überhaupt andere Körper in der Welt wahrnehmen, und dieselben mathematisch auf andere Atome reduziren, als wir dies den Bedingungen unserer Sinne gemäss thun müssen.

In Bewunderung unseres Witzes, vermöge dessen wir es fertig bringen so herrlich viel mit den Atomen zu erklären, vor diesen

Atomen als Urgottheiten anbetend niederzufallen, dazu liegt also nicht die mindeste Veranlassung vor; wenigstens für Jeden, der fähig ist alle die Faktoren zu erkennen, welche zur Erschaffung dieser Dingerchen mithelfen.

In der Erkenntniss, dass nicht allein die Eigenschaften der Dinge, sondern auch die Individualität derselben von dem Organismus des wahrnehmenden Individuums abhängt, liegt die Widerlegung des Realismus, welcher sich mit seiner menschlichen Ausstattung, trotz Kopernikus und Kant, stets für das normale Weltzentrum hält. Nicht Raum und Zeit sind die Formen unserer Sinnlichkeit, sondern es sind nothwendige Konstruktionen eines jeden Verstandes, einer jeden Sinnlichkeit; aber die Abgrenzung der Individuen und die Orte des Raumes, an welche wir sie hinsetzen, ist eine Folge der spezifischen Sinnlichkeit.

Das Einzige zu empfindenden denkenden Wesen nothwendige ist die Sammlung von Empfindungen in einer Persönlichkeit, die Beziehungen von Veränderungen auf ein Ich. Daraus folgt, dass alles, was ein solches Wesen über die materielle Konstitution seiner Organe, das mathematische Bewegungsbild der letzten Ursachen seiner subjektiven Empfindungen, zu sagen hat, in einem rythmischen Wechsel jener Bewegungen und vollständiger Abhängigkeit derselben von allem Nicht-Ich bestehen wird. Dem Leser bleibe überlassen diesem rythmischen Wechsel in beliebigen Naturbildern nachzuspüren. Zu positiven Resultaten wird dies schwerlich führen, aber es hält den Gedanken lebendig, dass es jenseits der trostlosen Oede, womit eine materialistische Anschauungsweise Natur und Seele bornirt, noch weite reiche Länder giebt.

Hier haben wir die Antwort auf das dunkle Räthsel des Dualismus über das Verhältniss von Körper zu Geist, die Umsetzung von Bewegung in Empfindung, die vermeintlich unübersteigliche Kluft für den menschlichen Intellekt, welche häufig genug mit einem dogmatischen Ignorabimus beantwortet worden ist.

Diese Frage ist dieselbe wie diejenige des Wilden, welchem die Photographie eines Menschen gezeigt wird, und später der Mensch selbst. Auch ihm ist es unbegreiflich wie das Bild zum lebendigen Menschen geworden sein könne, ebenso wie der Materialist

sich verwundert, dass die Stoffbildchen, mit denen er sich ausschliesslich in seinem Metier zu befassen gewohnt ist, zu Empfindung geworden seien.

Bewegung wird nie in Empfindung verwandelt, denn Empfindungen sind das Primäre, das Reale. Nur von Empfindungen wissen wir direkt etwas und machen davon zum Zwecke ihrer logischen Ordnung untereinander Bewegungsbildchen, an deren rythmischem Tanz das reflektirende Ich eine Ueberschau des Ganzen, die Ordnung und Gliederung seiner Empfindungen gewinnt.

Das denkende Ordnen macht die Materie, bestimmt das Reale nach dem Begriff der Materie, nach aufeinander wirkenden Ausgangspunkten der Setzung, sogenannten Atomen von Stoff und Kraft. Fehlt das Denken, dann hören auch die Atome auf zu existiren, obschon die Welt deshalb doch bestehen bleibt. Möglicherweise existirt aber immer und überall Denken in der Welt, und dann giebt es auch immer und überall eine Körperwelt in dem hier präzisirten Sinne. Die Atome müssen dagegen immer nur als eine mathematische Fiktion, eine Sorte allereinfachster Rechnungsmarken, betrachtet werden; man könnte sie vergleichen mit den Feldern des Schachbretts, welche den Zweck haben, die thatsächlichen Geschehnisse der Welt, die Züge des Spiels, nach festen Ausgangspunkten zu beurtheilen. Diese Fiktion ist allerdings nicht eine willkürliche, sondern für jedes denkende Wesen eine nothwendige, sowie auch ein jedes solches Wesen jedes andere nur als Körper anschauen kann, weil es seine Empfindungen nach Zeit und Raum konstruiren muss. Aus diesem Grunde sind die körperlosen Geister des Spiritualismus in das Bereich der Gespensterphantasien zu verweisen.

Wenn wir das Gesagte zum Schlusse in einigen der Sprache geläufigeren Begriffen zusammenfassen und sagen: der Geist ist es, welcher den Körper schafft — so ist dies also durchaus nicht in einem spiritualistischen Sinne zu verstehen. Wenn wir sagen: es giebt Materie, unbeseelter Stoff, so ist dies inhaltlich dasselbe, als sagten wir: alle Geshehnisse der Welt, von denen wir direkt nur etwas wissen als einer Reihe verschiedener (seelischer) Zustände der Empfindung, stehen in kausaler Verbindung, sind voneinander abhängig.

Haben wir einmal eine Summe solcher Empfindungszustände beobachtet und das Bewegungsbildchen derselben konstruirt, so liegt gar keine Schwierigkeit vor, nach jener kausalen Verbindungsregel alle Veränderungen dieses Bildchens zu konstruiren, welche in früherer oder späterer Zeit demselben entsprechen. Weil dies geschehen kann ohne weiter an jenes Primäre, die Empfindungszustände, zu denken, ebenso wie wir auch aus einer gegebenen geometrischen Figur andere ableiten können, ohne an die Muskelempfindungen zu denken, welche wir bei dem empirischen Begegnen mit solchen neuen Figuren erleiden müssten, deshalb gewöhnt man sich daran, jene Körperwelt als selbständig existirend, unabhängig von jeder Empfindungswelt zu denken. Daraus entsteht die Meinung von einem Dualismus der Welt, in welcher sich unbegreiflicher Weise eine jede der beiden Substanzen beständig in die andere verwandeln müsse, sobald es diesem oder jenem Individuum einfällt, seine Aufmerksamkeit darauf zu richten.

Bekanntlich ist der Glaube an einen todten Stoff, eine entseelte Natur, nicht der unmittelbaren naiven Wahrnehmung oder dem gesunden Menschenverstande entsprossen, sondern tauchte erst in einem späten Zeitalter des Menschengeschlechts auf, wo die Theilung der Arbeit zu der Pflege wissenschaftlicher aber zugleich auch einseitiger Abstraktion geführt hatte. In diesem vorzugsweise wissenschaftlich genannten Zeitalter trug noch ein anderes Moment zu der herrschenden Meinung von einem Weltdualismus als Körper und Geist bei. Es war die Beobachtung, dass jene als Materie bestimmten Abstraktionen überall der kausalen Abhängigkeit folgten, dass dem gegenüber aber jedes beseelte Individuum das Bewusstsein hat, handeln zu können wie es will. Daraus folgerte man einen Gegensatz von geistiger Freiheit, welche stets mit „Willkür“ verwechselt wurde, und materieller Nothwendigkeit; wies diese letztere als essentielle Eigenschaft der einen Weltsubstanz M a t e r i e zu, jene Freiheit der anderen Weltsubstanz G e i s t.

Die Beobachtung, dass beseelte Wesen einen Willen haben und der todte Stoff keinen, ist unzweifelhaft richtig, und gleicherweise, dass trotz aller Kausalität der Natur eine moralische Freiheit den Menschen zukommt. Deshalb ist es aber noch nicht nothwendig, zur Lösung dieses scheinbaren Widerspruchs zwei heterogene

Weltsubstanzen zu erfinden, sondern diese Lösung erfordert zunächst eine genaue Definition der Begriffe: Wille, Freiheit, Nothwendigkeit, Willkür etc., was eben gewöhnlich versäumt wird (s. ME. 104—112).

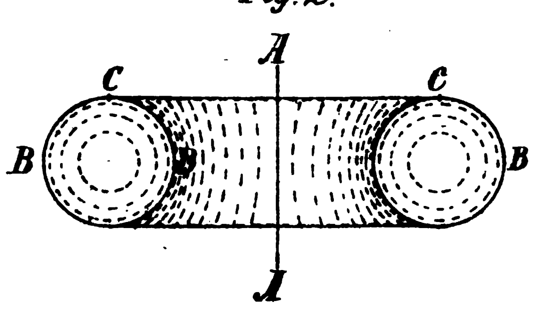
In dem vorhin gebrauchten Ausdrucke: der Geist schafft den Körper — bezeichneten wir die Summe bewusster Zustände mit dem Worte „Geist". Das ist zu unterscheiden von dem üblichen Begriff „Geister". Ebensowenig wie bebeseelten Monaden in Leibnitz'schem Sinne, ist hier empfindenden Atomen, welche zuweilen für ein System des Monismus ausgegeben werden, das Wort geredet worden; ebensowenig stabilen Persönlichkeiten als Geistern oder Gespenstern in mittelalterlichem Sinne. Von solchen stabilen Persönlichkeiten weiss unsere Analyse nichts; im Gegentheil, es würde derselben eher entsprechen, auch das lebendige Individuum in eine Unzahl einander folgender Ich aufzulösen, von denen ein jedes nur einem einzigen Momente in dem Leben eines Menschen entspricht. Das Ich ist vorab nur ein grammatischer Begriff, zum Zwecke, um die verschiedenen Zustände des Bewusstseins auf ein einheitliches Subjekt zu beziehen; und deshalb von derselben Relativität als methaphysischer Begriff, wie die Individualität der Dinge. Wollte man aus diesem Ich ohne weitere Einschränkung eine stabile Substanz machen, so wäre dem zu widersprechen; denn jenes Ich ist eine ebenso flüchtige Erscheinung, wie ein Einzelgedanke, eine Einzelempfindung. Wir sind gewohnt, eine Reihe solcher Ich, Brennpunkte, welche ein jeder für sich ein vollständiges Gemälde enthalten, wenn wir sie in uns selbst als Erinnerungen, oder ausser uns als eine räumlich-zeitliche Kontinuität verfolgen zu können glauben (!!), Persönlichkeiten zu nennen. Aber diese Kontinuität ist häufig eine sehr anfechtbare. Die in der Erinnerung uns vorschwebende hat häufig ganz andere Endpunkte, als die von dem Standesamt zunächst für den Leib trotz aller seiner physischen Veränderungen registrirte; und wer kann wissen, was andere Organismen — wenn es deren giebt — für Meinungen über diese unsere Kontinuität als Person haben; ob sie uns nicht ganz andere Grenzen zusprechen, ähnlich wie die Juristen auch verschiedene Meinungen über den Begriff der juristischen oder moralischen oder physischen Persönlichkeit aufstellen. Hiermit

soll keine weitere verborgene Weisheit angedeutet, sondern nur zu Gemüthe geführt werden, dass alle apodiktischen Behauptungen auf diesem Gebiete höchstens Verstandesbeschränkungen der Sprecher anzeigen.

Unsere Aufgabe schliesst hier, denn wir stehen mit den letzten Sätzen schon vor den Problemen der Individuation aus dem allgemeinen Realen, und der Auflösung dieser Individuen — Problemen, welche ausserhalb des Rahmen unserer Untersuchung liegen; ja ausserhalb desselben liegt schon die Vorfrage, ob diese Gegenstände überhaupt nebeh der poetischen auch eine wissenschaftliche Behandlung zulassen.

Fig. 1.

Fig. 2.



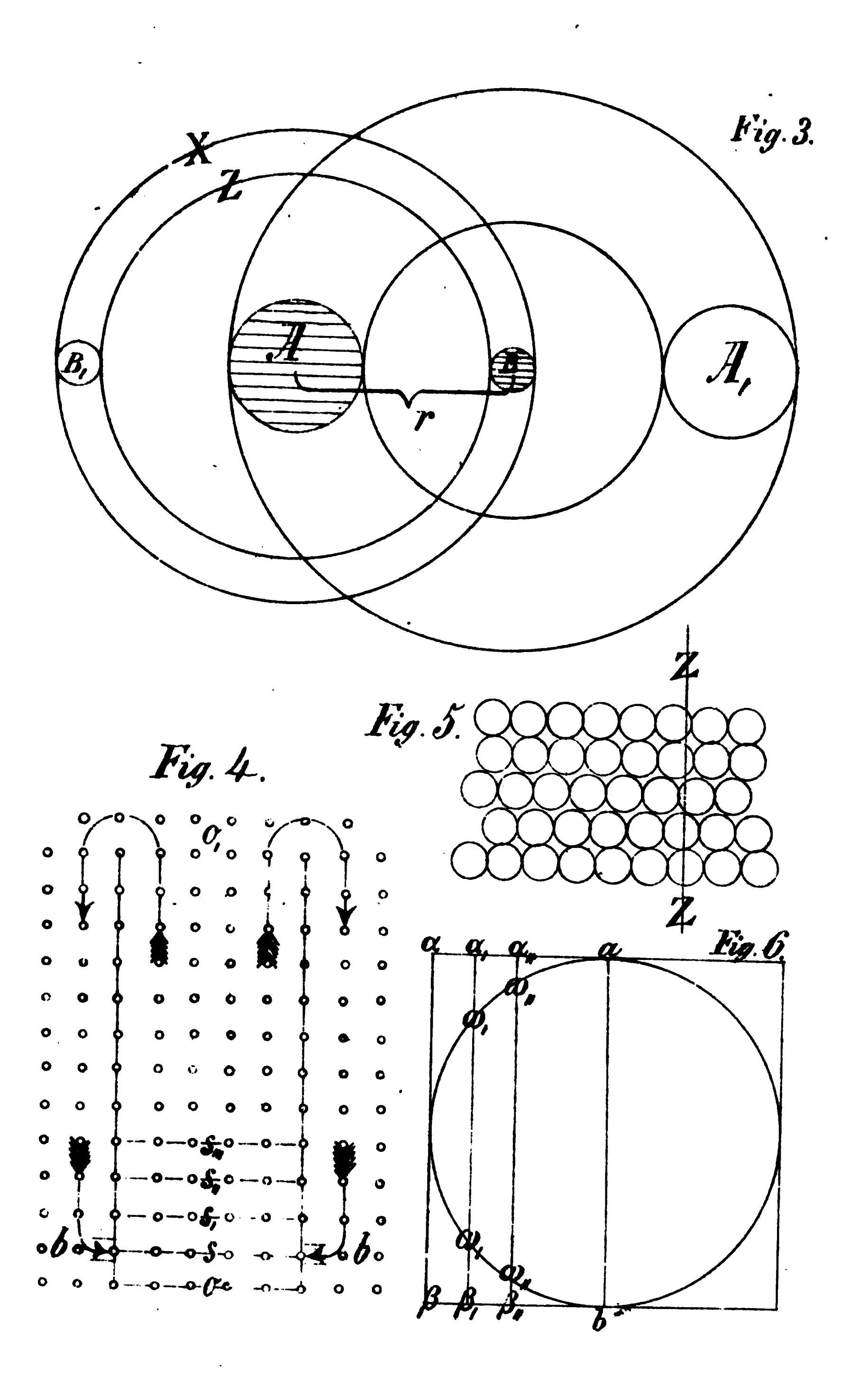
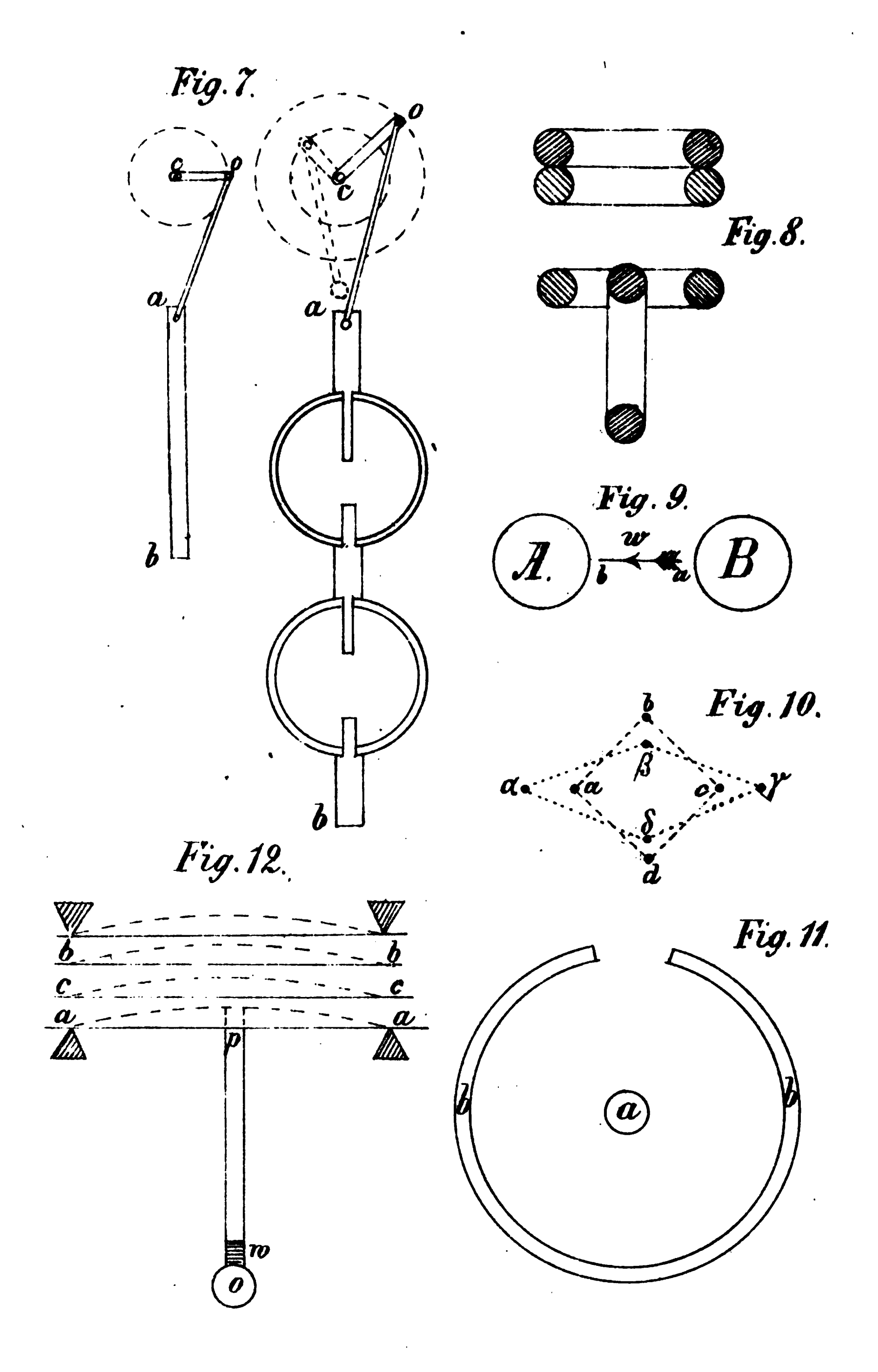


Fig. 3.
X
Z
A
B
B_1
A_1
r
Fig. 4.
Fig. 5.
Z
Z
Fig. 6.


Fig. 7.
c
o
a
b
c
o
a
b
Fig. 8.
Fig. 9.
A.
w
b
a
B
Fig. 10.
b
β
α
a
c
γ
δ
d
Fig. 12.
b
b
c
c
a
a
p
w
o
Fig. 11.
b
a
b

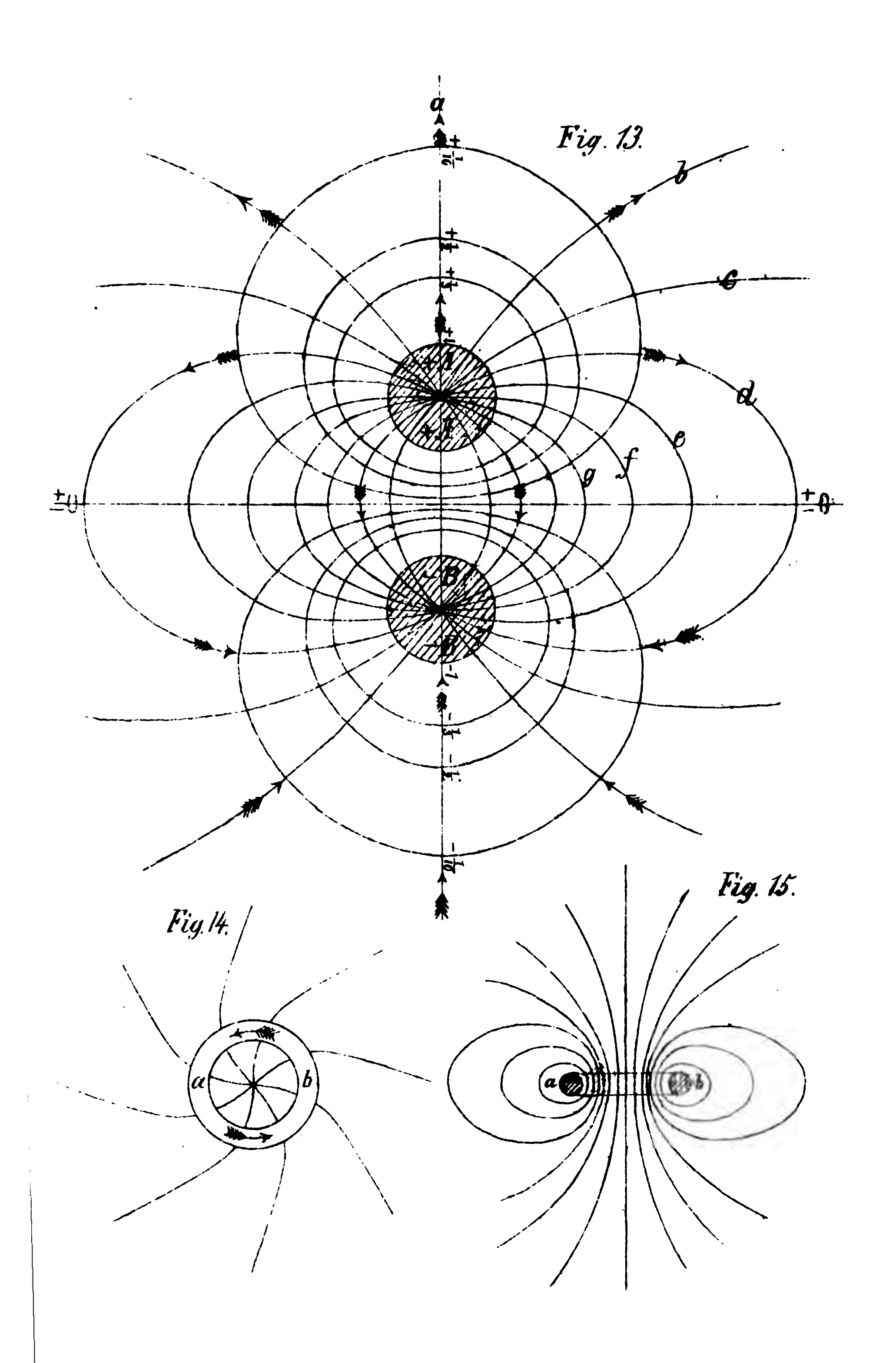
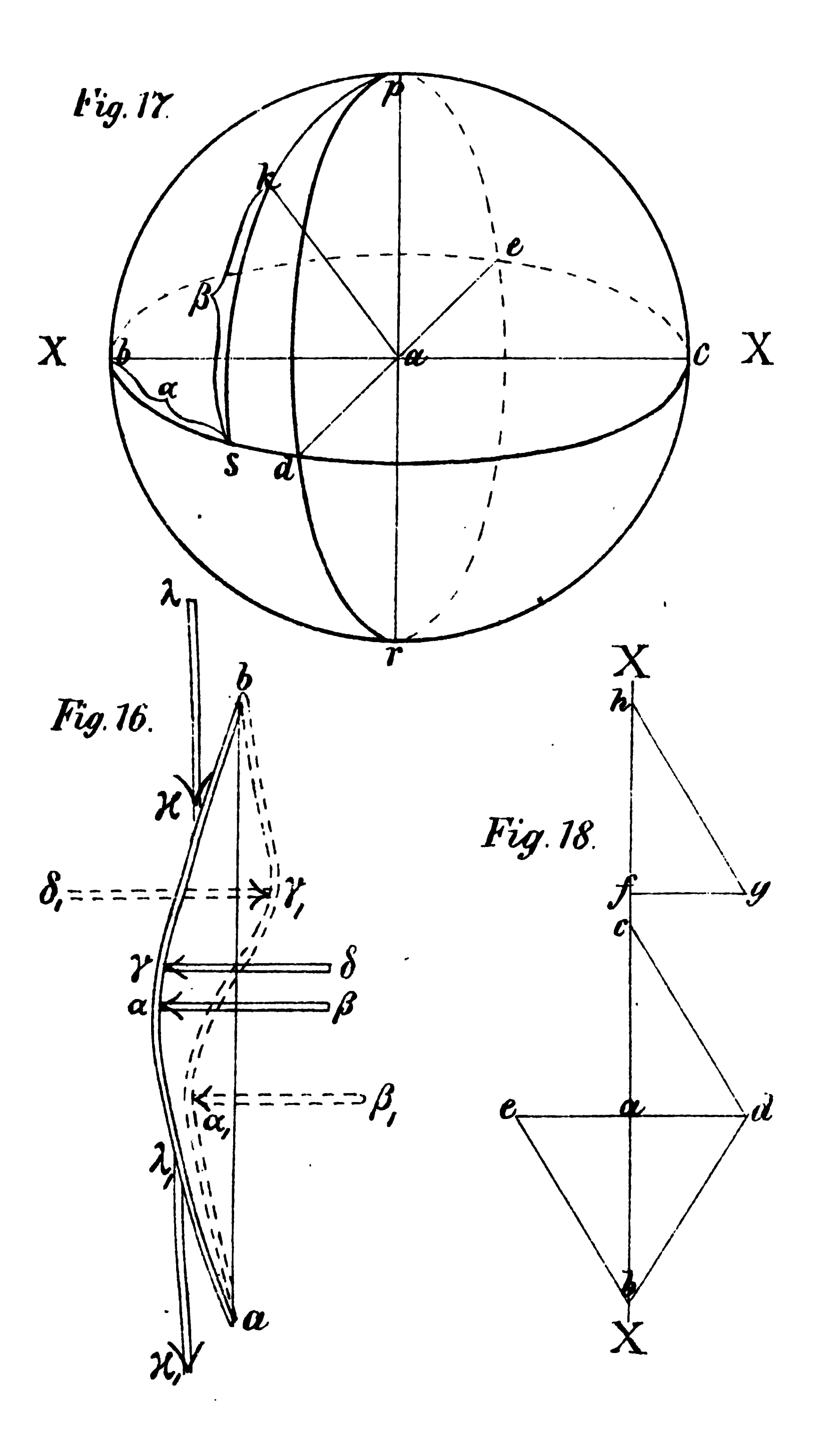


Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.


Fig. 17.
p
k
e
β
X
b
a
c
X
α
s
d
r
λ
b
Fig. 16.
κ
δ,
γ,
γ
δ
α
β
α,
β,
λ,
a
κ,
X
h
Fig. 18.
f
g
c
e
a
d
b
X

Druck von H. Sieling in Naumburg.

